

Стохастическое моделирование полей сплочённости ледяного покрова для оценки условий плавания по трассе Северного морского пути

© 2022 г. Р.И. Май^{1,3*}, Р.Б. Гузенко², О.В. Таровик¹, А.Г. Топаж⁴, А.В. Юлин²

¹Крыловский государственный научный центр, Санкт-Петербург, Россия; ²Арктический и Антарктический научно-исследовательский институт, Санкт-Петербург, Россия; ³Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия; ⁴ООО «Бюро Гиперборея», Санкт-Петербург, Россия

*rimay@mail.ru

Stochastic modeling of sea ice concentration fields for assessment of navigation conditions along the Northern Sea Route

R.I. May^{1,3*}, R.B. Guzenko², O.V. Tarovik¹, A.G. Topaj⁴, A.V. Yulin²

¹Krylov State Research Center, St. Petersburg, Russia; ²Arctic and Antarctic Research Institute, St. Petersburg, Russia; ³Saint Petersburg State University, St. Petersburg, Russia; ⁴LLC «Bureau Hyperborea»

*rimay@mail.ru

Received June 29, 2021 / Revised October 10, 2021 / Accepted December 23, 2021

Keywords: ice concentration, sea ice generator, stochastic modeling, ice conditions, Markov chain, Arctic navigation.

Summary

Article describes a probabilistic model (stochastic generator) of spatial-temporal variability of sea ice concentration. Values of the ice concentration are generated at the nodes of the spatial grid with 10 km resolution; the model time step is one day. The change in ice concentration with time (temporal variability) is modeled on the basis of a matrix of transient probabilities (discrete Markov chain), each row of which is a distribution function of the conditional probability of changes in the ice concentration. Spatial variability is determined by empirical probability fields, with which the observed changes in fields of the ice concentration are associated with known conditional probability distribution functions. To identify the parameters of the stochastic generator, satellite data from the OSI SAF project for the period 1987–2019 were used. The generator takes into account seasonal, interannual and climatic variability. Interannual and climatic variability are determined on the basis of a stochastic model of changes in the types of ice coverage. In order to verify the developed stochastic generator, we compared the statistical indicators of observed and calculated ice fields. The results showed that the field-average absolute error of statistical characteristics of the ice concentration (mean and standard deviation) does not exceed 3.3%. The discrepancy between the correlation intervals of ice coverage calculated from the model and measured ice concentration fields does not exceed 2 days. The variograms of the modeled and observed fields have a similar form and close values. As an example, we determined the duration of navigation of Arc4 ice class ships between the Barents and Kara Seas using synthetic fields of the ice concentration reproduced by the stochastic generator.

Citation: May R.I., Guzenko R.B., Tarovik O.V., Topaj A.G., Yulin A.V. Stochastic modeling of sea ice concentration fields for assessment of navigation conditions along the Northern Sea Route. *Led i Sneg. Ice and Snow*. 2022, 62 (1): 125–140. [In Russian]. doi: 10.31857/S2076673422010121.

Поступила 29 июня 2021 г. / После доработки 10 октября 2021 г. / Принята к печати 23 декабря 2021 г.

Ключевые слова: вероятностное моделирование, сплочённость льда, стохастический генератор ледяного покрова, ледовые условия, цепь Маркова, навигация в Арктике.

Описана созданная вероятностная модель пространственно-временной изменчивости сплочённости ледяного покрова. Временная связанность обеспечивается за счёт использования цепей Маркова, а пространственная – путём введения эмпирических полей вероятности. Модель учитывает синоптическую, сезонную, межгодовую и климатическую изменчивости ледяного покрова. Определение параметров стохастического генератора выполнено на основе архивных данных проекта OSI SAF. Верификация модели показала, что средняя по полю абсолютная ошибка статистических показателей сплочённости (среднее и стандартное отклонение) относительно исторических данных не превышает 1/3 балла. Автокорреляционные функции ледовитости и вариограммы отдельных полей сплочённости по модельным и фактическим данным имеют схожий вид. На основе результатов расчёта вероятностной модели полей сплочённости рассчитаны даты начала и окончания навигации судов ледового класса Arc4 между Баренцевым и Карским морями.

Введение

От наличия ледяного покрова зависят условия хозяйственной деятельности в большинстве морей России, особенно – в наиболее перспек-

тивном Арктическом регионе. В настоящее время для наблюдения за льдом и определения его параметров используется целый комплекс технологий, позволяющих получать спутниковые снимки различного типа, строить диагностические

ледовые карты, а также прогнозировать динамику льдов на основе численных моделей. Оперативные диагностические и прогностические данные служат для планирования навигации судов во льдах, а архивная информация используется для статистической оценки режимных характеристик ледяного покрова при решении многих инженерных и научных задач. В частности, необходимо не только оценивать статистические характеристики льда, но и моделировать различные процессы, связанные со льдом. К таким сферам относятся: анализ рисков ледового плавания; прогнозирование длительности рейсов судов во льдах; определение параметров работы морских транспортных систем и многое др. При выполнении таких исследований имеющихся рядов наблюдений может оказаться недостаточно для получения статистически значимых оценок интересующих параметров, поэтому необходимо получить дополнительные, искусственные варианты реализации ледовой обстановки. С этой целью могут использоваться вероятностные модели пространственно-временной изменчивости ледяного покрова.

Подобные вероятностные модели, воспроизводящие метеорологические характеристики, получили название «стохастические генераторы погоды». Их широко применяют для оценки количества атмосферных осадков [1], снегозапасов [2], температуры воздуха [1], облачности [3] и др. Некоторые стохастические генераторы дополнены физическими зависимостями между метеорологическими элементами и воспроизводят целый комплекс параметров, характеризующих состояние атмосферы [4]. Реализация генераторов погоды позволяет методом Монте-Карло оценивать вероятность стихийных бедствий [5], метеорологическое воздействие на живые организмы и экосистемы [6], сельскохозяйственную деятельность [7], потребление электроэнергии и др. Кроме того, генераторы погоды используют для имитации изменчивости синоптического масштаба при заданных климатических сценариях состояния атмосферы [8]. В большинстве генераторов погоды для воспроизведения временной динамики метеорологических параметров дискретной природы часто используется простая цепь Маркова [9]. В одномерном случае моделируемый параметр на каждом шаге модели определяют с помощью условной функции рас-

пределения как квантиль значений вероятности, созданный генератором случайных чисел, равномерно распределённых от 0 до 1.

Подобные вероятностные модели, применяемые для получения синтетической метеорологической информации в точке, получили в литературе название *одноточечных (single-site) генераторов* [9, 10]. Для расчёта связанных по пространству полей синтетической метеорологической информации созданы *многоточечные (multisite) погодные генераторы и сеточные генераторы* [9]. Многоточечные генераторы представляют собой комплекс одноточечных генераторов, для которых по данным измерений определены статистические параметры синхронного изменения.

Простые сеточные генераторы могут быть основаны на пространственном интерполировании результатов расчёта многоточечных генераторов в узлы сетки. Однако при таком подходе в синтетических реализациях погоды удаётся отобразить только пространственное распределение климатических показателей (например, сезонных трендов средних значений моделируемых величин), а не их пространственную связь — корреляцию случайных вариаций в соседних точках или областях [11]. Более *сложные погодные генераторы* основаны на использовании методов стохастического моделирования, позволяющих одновременно учесть временную (зависимость между значениями одного метеоэлемента в одной точке в разные моменты времени), пространственную (зависимость между значениями одного метеоэлемента в один момент времени в соседних точках) и структурную (зависимость между значениями разных метеоэлементов в конкретной пространственно-временной локации) корреляцию составляющих погоды как многомерного дискретного случайного процесса. При этом можно показать, что добиться абсолютного соответствия эмпирических и модельных показателей временной и пространственной связности можно только в случае одновременной генерации всех точек пространственно-временного дискретного поля [12]. Однако размерность задачи и вычислительная сложность алгоритма для многоточечных пространственных сеток — очень большие, поэтому используется следующий распространённый подход: последовательное использование на каждом шаге алгоритма статистического моде-

лирования метода генерации случайного поля с заданными пространственными корреляционными связями [9] и его дальнейшее рекурсивное развёртывание во времени отдельно для каждого узла расчётной сетки по авторегрессионным зависимостям, обеспечивающим требуемый уровень временной связности [13].

Стохастические генераторы погоды широко применяют в метеорологии и гидрологии, однако в исследованиях ледового режима замерзающих морей их использование очень ограничено. Вероятностные модели применяли при оценке условий плавания судов во льдах [14] и определении вероятности аварийных ситуаций [15]. Последние задачи – ключевые для развития арктического судоходства, поскольку именно длительность рейсов и уровень рисков определяют эффективность плавания судов в Арктике. Практически во всех задачах такого типа ледовые параметры моделируются вдоль заданных маршрутов движения. Это – достаточно условный подход, поскольку реальная траектория движения судов может изменяться в зависимости от ледовых условий как на локальном (выбор маршрута в заданном регионе), так и на стратегическом (выбор региона плавания) уровнях. Именно поэтому более точные и соответствующие реальности результаты моделирования движения судов во льдах (особенно при прогнозировании длительности рейсов в будущем, в условиях изменения климата) могут быть получены при использовании ансамбля пространственно-временных полей ледовых параметров и применении технологии ледовой маршрутизации [16, 17] для поиска оптимального пути судна.

Таким образом, для получения синтетической информации о пространственно-временной изменчивости параметров льда необходимо разработать комплекс вероятностных моделей, образующих «стохастический генератор ледяного покрова». Эта задача – новая и актуальная. Первый шаг в реализации такого генератора – моделирование изменчивости сплочённости льда. Сплочённость характеризует степень покрытия акватории льдом и служит одним из важнейших параметров ледяного покрова, поэтому именно с неё следует начинать разработку стохастического генератора, дополняя его затем вероятностными моделями изменчивости остальных характеристик льда.

Стохастический генератор ледяного покрова

Источник исходной информации о сплочённости ледяного покрова. Из нескольких свободно распространяемых баз данных характеристик ледяного покрова был выбран продукт OSI-409 v.1.2, разработанный Норвежским и Датским метеорологическими институтами под эгидой Европейской организации по использованию метеорологических спутников EUMETSAT [18]. Данные OSI-409 охватывают отрезок времени с 25.10.1978 г. по 31.12.2019 г. Значения сплочённости размещены в прямоугольной сетке, созданной в полярной стереографической проекции, с пространственным шагом 10 км и дискретностью по времени, равной одним суткам. Данные доступны на портале osisaf.met.no.

Математическое описание стохастического генератора ледяного покрова. Результаты анализа автокорреляционных функций изменения ледовитости арктических морей [19] показали, что для описания изменчивости характеристик ледяного покрова может быть применена цепь Маркова. В настоящей работе для моделирования изменения сплочённости во времени использована дискретная цепь Маркова первого порядка. В стохастическом генераторе ледяного покрова был реализован алгоритм, описываемый уравнением

$$C_{t+1,x,y} = F_{(C_{t+1,x,y}|C_{t,x,y})}^{-1}(P_{t,x,y}), \quad (1)$$

где $C_{t+1,x,y}$ – поле сплочённости в координатах сетки x, y на следующем временном шаге; $F_{(C_{t+1,x,y}|C_{t,x,y})}^{-1}$ – обратная условная функция распределения вероятностей переходов сплочённости; $C_{t,x,y}$ – известное значение поля сплочённости на предыдущем временном шаге; значение $C_{t,x,y}$ определяет номер строки матрицы переходных вероятностей, по которой формируется функция $F_{(C_{t+1,x,y}|C_{t,x,y})}$; $P_{t,x,y}$ – поле модельных величин вероятности.

Учёт синоптической, сезонной, межгодовой и климатической изменчивости. Ледяному покрову свойственны синоптическая, сезонная, межгодовая и климатическая изменчивости. Уравнение (1) описывает суточную последовательность изменения сплочённости, что соответствует синоптической изменчивости, связанной со сменной атмосферных барических образований. Сезонная изменчивость учтена с помощью раз-

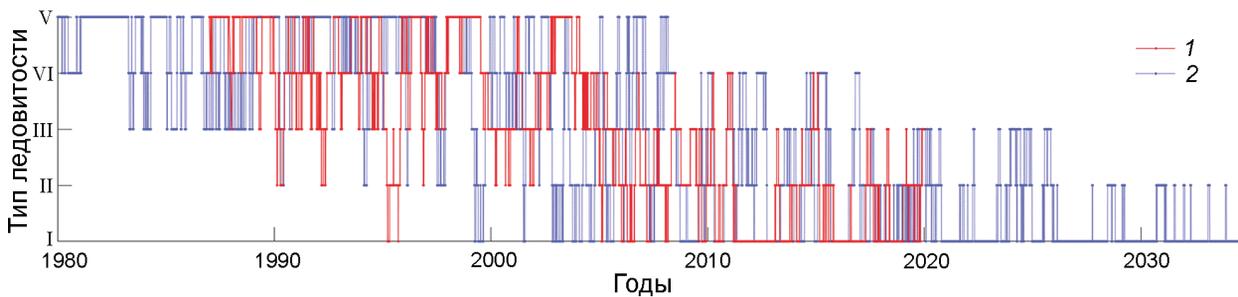


Рис. 1. Временной ряд последовательности изменения типов ледовитости по данным проекта OSI-409 (1) и на основе стохастического моделирования (2); I – V см. текст

Fig. 1. Time series of the changes in types of ice conditions from the OSI-409 project (1) and according to the stochastic model (2); I – V see text

деления временного ряда изменения сплочённости на месячные отрезки времени с годовой периодичностью. Для устранения неопределённостей, связанных с временной интерполяцией месячных оценок параметров пространственно-временной изменчивости сплочённости использован скользящий анализ данных с шагом по времени один сутки и окном 31 сут., т.е. для оценок значений $F_{(C_{t+1,x,y}|C_{t,x,y})}^{-1}$ использовались данные за отрезок времени $[t - \omega \dots t + \omega]$, где $\omega = 15$ сут. Для имитации межгодовой изменчивости описанный алгоритм был применён для пяти типов ледовых условий.

В настоящей работе рассматриваются только изменения сплочённости, поэтому в качестве критерия для типизации использовалась ледовитость рассматриваемой акватории как интегральная оценка общей сплочённости. В нашем случае ледовитость привязана не к конкретному морю, а к площади, которая охватывается сеточной областью модели. Поля сплочённости проекта OSI-409 пересчитывались во временной ряд изменения ледовитости моделируемой акватории с суточной дискретностью. Типизацию ледовитости проводили для каждого дня года: все значения за 32 года, приходящиеся на данный день года, разбивались на заданное число типов. В данной работе квантили для вероятностей рассчитывались с шагом 0,2. Полученные значения квантилей использованы в качестве пороговых значений пяти типов ледовитости, которые можно назвать «лёгкими» (I), «среднелёгкими» (II), «средними» (III), «среднетяжёлыми» (IV) и «тяжёлыми» (V). Каждому значению ледовитости, попадающему в соответствующий диапазон, был присвоен тип ледовитости. В результате такого расчёта получен

временной ряд изменения типов ледовитости (рис. 1). Типизация ледовитости проводится для каждого дня года, поэтому сезонная изменчивость никак не отражается во временных рядах изменения типов ледовых условий.

По временному ряду изменения типов ледовитости рассчитана матрица вероятностей переходов из одного типа ледовитости в другой. Результаты расчёта показали, что за одни сутки с вероятностью 0,89–0,96 тип ледовитости не изменится, а с вероятностью 0,05–0,06 изменится только на одну градацию. Полученные вероятностные характеристики временной изменчивости типов ледовитости использовались для получения модельного временного ряда типов ледовитости заданной длины реализации. Климатическая изменчивость типов ледовитости учитывается с помощью рассчитанных параметров тренда изменения ледовитости. В качестве модели климатической изменчивости типов ледовитости можно использовать любую выявленную закономерность изменения ледовитости (линейный тренд, полициклические колебания, полиномиальные регрессионные уравнения и др.). Мы использовали линейный тренд. Полученные результаты показали, что по данным проекта OSI-409 с 1987 по 2019 г. линейный тренд имеет отрицательные значения, т.е. отмечается тенденция изменения типов ледовитости к более лёгким условиям со скоростью одна градация типа ледовитости за 8,9 лет. Этот тренд прослеживается на рис. 1.

Аддитивная модель изменения типов ледовитости основана на использовании цепей Маркова с добавлением детерминистической составляющей в виде линейного тренда. По модельному

временному ряду изменения типов ледовитости, который имитирует межгодовую и климатическую изменчивость, происходит выбор условных вероятностей и эмпирических полей вероятности, рассчитанных для данного типа ледовитости. Пример смоделированного временного ряда последовательности типов ледовитости представлен на рис. 1. На этом рисунке также приведена последовательность типов ледовитости, определённая по исходным данным проекта OSI-409.

Эмпирические поля вероятности. Характерные особенности корреляционной структуры полей вероятности $P_{t,x,y}$ можно оценить по данным наблюдений. Для этого уравнение (1) преобразуем так, чтобы, подставив значения сплочённости на двух соседних шагах по времени (C_t и C_{t+1}) в условную функцию распределения сплочённости $F_{(C_{t+1}|C_t)}$, можно будет выполнить обратный расчёт, т.е. оценить единственно возможное значение вероятности P , при котором выполняется переход сплочённости C_t в C_{t+1} . Распространяя описанное действие на все ячейки сеточной области и на все последовательные пары шагов по времени, можно оценить эмпирические трёхмерные поля вероятности $P_{t,x,y}^*$:

$$P_{t,x,y}^* = F_{(C_{t+1,x,y}|C_{t,x,y})}(C_{t,x,y}, C_{t+1,x,y}). \quad (2)$$

Знак «*» в уравнении (2) указывает на то, что поле вероятностей определено по исходным данным. В нашем случае трёхмерный массив $P_{t,x,y}^*$ представляет собой временную последовательность полей вероятности, которые вызвали изменения сплочённости на рассматриваемом отрезке времени. Отметим, что в этом случае в качестве источника данных о пространственной связности выступают не исходные поля генерируемой характеристики в различные временные срезы, а эмпирические поля переходных вероятностей, вычисленные «обратным счётом» по фактическим наблюдениям смены картины сплочённости в соседние моменты времени. При этом проблема «размывания» желательной пространственной корреляции при прогоне через алгоритм цепи Маркова с различными величинами матриц перехода в соседних точках пространственной сетки [20] становится более не актуальной.

На основе полученного массива эмпирических полей вероятности $P_{t,x,y}^*$ можно подобрать модель полей вероятности $P_{t,x,y} = f(P_{t,x,y}^*)$, ко-

торые используются в уравнении (1) для стохастического моделирования полей сплочённости. В прикладной геостатистике разработано большое число алгоритмов стохастического моделирования случайных полей с заданными характеристиками пространственной коррелированности значений в близко расположенных точках или областях [21, 22]. Для их построения используют подходы скользящего среднего, разделения на локальные подобласти по средней величине, разложения Холецкого полной матрицы ковариации, дискретного преобразования Фурье и др. Многие из этих подходов включены в стандартные статистические пакеты и комплексы программ [23].

Модели полей случайных вероятностей всегда будут содержать погрешности, вызванные тем или иным методом аппроксимации, поэтому случайные поля $P_{t,x,y}$ в уравнении (1) мы предлагаем заменить массивом эмпирических полей вероятности $P_{t,x,y}^*$. Очевидно, что прямая последовательность эмпирических полей вероятности ($P_{t,x,y} = P_{t,x,y}^*$), рассчитанных по данным наблюдений, позволяет воспроизвести результаты стохастического генератора на отрезок длиной N_Y лет. Так как случайные поля $P_{t,x,y}$ и их эмпирические оценки $P_{t,x,y}^*$ имеют равномерное распределение, для увеличения длины реализации стохастического генератора последовательность полей $P_{t,x,y}^*$ можно менять местами. Выбор одного поля вероятности для момента времени t из набора $P_{t,x,y}^*$ выполняется по формуле

$$P_{t,x,y} = P_{t+[R_1 \times N_Y \times N_D] + [U^{-1}(R_2, \mu, \sigma)]_{x,y}}^* \quad (3)$$

где $U^{-1}(R_2, \mu, \sigma)$ – обратная функция нормального распределения с математическим ожиданием $\mu = t$ и стандартным отклонением $\sigma = \omega/3$; R_1, R_2 – случайные величины, созданные генератором случайных чисел; $[]$ – операция округления до целого; N_Y – число годов в рядах; N_D – число дней в году; t – порядковый номер дня в году.

В формуле (3) выбран нормальный закон распределения для сохранения сезонной изменчивости, которая присутствует в рядах эмпирических полей вероятности $P_{t,x,y}^*$. Число неповторяющихся комбинаций последовательности эмпирических полей вероятности для каждого дня года равно $(2\omega \times N_Y)^{N_D}$, максимальная длина реализации генератора будет равна 10^{1088} лет при $\omega = 15$ сут. и $N_Y = 32$ года. Такой длины рядов

синтетической информации о ледяном покрове вполне хватит для оценки параметров навигации методом Монте-Карло.

Реализация стохастического генератора ледяного покрова. Стохастическое моделирование полей сплочённости ледяного покрова выполняется следующим образом. Сначала на основе аддитивной модели генерируется временной ряд изменения типов ледовитости с суточной дискретностью. После этого для каждого суток по известным типам ледовитости выбирают условные функции распределения вероятностей изменения сплочённости, а по формуле (3) – эмпирические поля вероятностей, свойственные указанному типу ледовитости и дню года (сезону). Далее с помощью формулы (1) моделируется поле сплочённости на следующий временной шаг. Описанная последовательность действий повторяется на заданную длину реализации. Начальное поле сплочённости может быть выбрано случайно из набора исходных данных или задано в виде случайного поля. В последнем случае необходимо выделить время, чтобы начальные условия не влияли на результаты моделирования. Однократная реализация стохастической модели воспроизводит один из возможных сценариев развития ледовой обстановки. Для получения ансамбля всевозможных вариантов целесообразно повторить расчёт вероятностной модели несколько раз, и по совокупности результатов таких расчётов можно определить точечные и интервальные оценки искомых параметров. Все результаты, представленные далее в статье, получены по 20 независимым реализациям генератора.

Верификация стохастического генератора ледяного покрова

Основное требование, предъявляемое к результатам стохастического моделирования, – качественное и количественное совпадение статистических характеристик, получаемых в ходе обработки результатов моделирования и реальных наблюдений за природной обстановкой. Для оценки выполнения этого требования проведено сравнение получаемых расчётных статистических характеристик полей сплочённости с аналогичными параметрами исходных данных спутниковых наблюдений.

На рис. 2 приведены поля средних значений и значений среднеквадратического отклонения (СКО) сплочённости для апреля и июня, рассчитанные с 1987 по 2019 г. по фактическим данным и результатам стохастического моделирования. Видно, что статистические характеристики результатов моделирования хорошо согласуются с аналогичными параметрами, полученными в ходе анализа исходных данных проекта OSI-409. Градиент значений средней сплочённости и максимальные значения СКО сплочённости указывают на нахождение в этой области кромки ледяного покрова в указанное время года. В апреле кромка льда проходит в Печорском море и по линии, соединяющей южную оконечность Шпицбергена с северной оконечностью Новой Земли. Летом кромка льда в Карском море поднимается севернее и проходит по линии Шпицберген – Земля Франца-Иосифа – Северная Земля. Такая тенденция прослеживается на картах статистических характеристик сплочённости ледяного покрова как по спутниковым данным, так и по результатам расчёта стохастического генератора ледяного покрова (см. рис. 2). Совпадение средних значений сплочённости по результатам анализа фактических данных и результатам моделирования показывает, что стохастический генератор корректно воспроизводит сезонную изменчивость кромки льда, а совпадение полей СКО сплочённости за отдельные месяцы свидетельствует о правдоподобном воспроизведении синоптический изменчивости положения кромки льда.

На рис. 2 видны прибрежные области уменьшения среднего значения и увеличения СКО сплочённости. Эти локальные особенности поля среднего значения сплочённости объясняются продуцированием полыней в прибрежной области за счёт отжимных ветров. Совпадение результатов анализа фактических и модельных данных свидетельствует, что модель на качественном уровне воспроизводит образование полыней. Для зимних месяцев такие локальные области уменьшения среднемесячной сплочённости могут располагаться не у побережья, а у кромки обширного припая, например, на рис. 2, а, б такие образования видны северо-западнее Таймыра. Совпадение таких элементов в результатах анализа модельных и наблюдаемых данных указывает, что вероятностная модель также воспроизводит припай и заприпайные полыни.

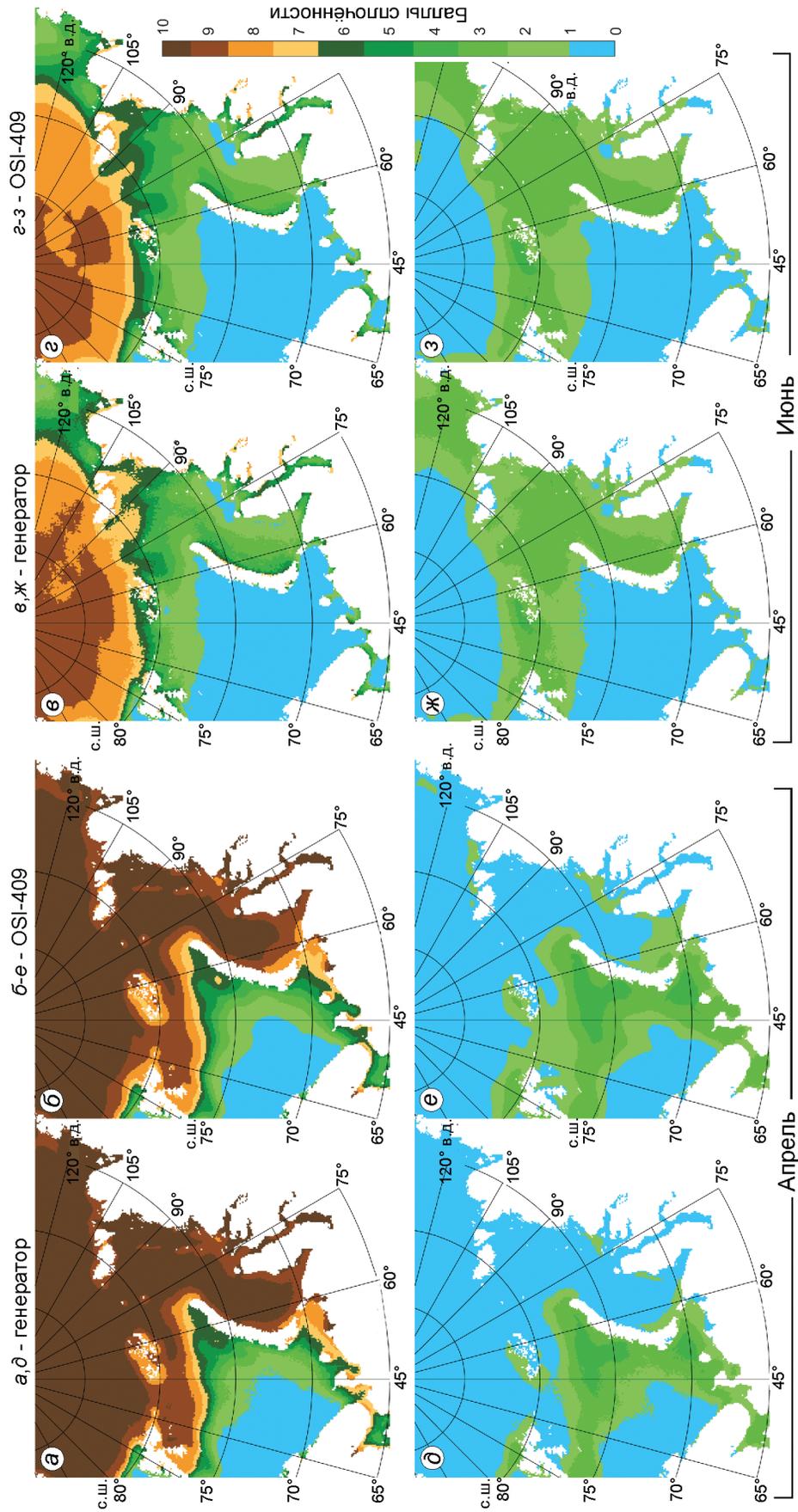


Рис. 2. Среднее значение (*а-в*) и среднеквадратическое отклонение (*б-з*) сплошности по результатам расчёта стохастического генератора (*а, д, е, ж*) и данным проекта OSI-409 (*б, е, з*) в апреле и июне
Fig. 2. Mean value (*а-в*) and standard deviation (*б-з*) of sea ice concentration based on the results of stochastic generator calculations (*а, д, е, ж*) and OSI-409 project data (*б, е, з*) for April and June.

Для количественной оценки сходства полей средних значений и СКО использована средняя абсолютная ошибка (mean absolute error, MAE):

$$MAE = \sum |C_D - C_G| / N,$$

где C_D – поле характеристик, рассчитанных по исходным данным; C_G – поле характеристик, рассчитанных по результатам вероятностного моделирования; N – число сравниваемых пар ячеек в полях C_D и C_G .

В табл. 1 приведены значения средней абсолютной ошибки для полей средней сплочённости и СКО сплочённости для каждого месяца. Приведено среднее значение по 20 реализациям генератора с оценкой 95%-го доверительного интервала. Как видно из табл. 1, среднее абсолютное отклонение между полями среднего значения сплочённости не превышает 0,29 балла. Максимальное значение MAE балла полей СКО составило 0,31 балла. Выраженного сезонного изменения значений средней абсолютной ошибки полей среднего значения и СКО сплочённости не наблюдается. Корректность временной связанности результатов моделирования можно оценить сравнением автокорреляционных функций результатов моделирования и исходных данных проекта OSI-409. Так как сеточная область имеет размер 305×258 (78 690 ячеек), воспользуемся временным рядом ледовитости акватории для получения интегральной оценки временной изменчивости полей сплочённости. Автокорреляционные функции ледовитости пересекают первую нулевую отметку (интервал корреляции при $\epsilon = 0$) на сдвигах 95 сут. для исходных данных и 93 сут. для данных, воспроизведённых генератором ледяного покрова. Интервал корреляции при $\epsilon = 0,7$ составляет 44 сут. для исходных данных и 43 сут. для результатов моделирования.

Характеристики пространственной корреляции случайных полей принято оценивать с помощью вариограмм, которые показывают распределение ковариации значений элементов поля в зависимости от пространственного смещения. Длина исходных данных о сплочённости проекта OSI-409 составляет 11 853 сут., 20 реализаций стохастического генератора дают на каждое поле фактических данных 20 равноценных альтернативных друг другу вариантов. Сопоставить такое число вариограмм в рамках одной статьи технически невозможно, поэтому

Таблица 1. Сравнение статистических характеристик сплочённости, полученных по исходным спутниковым данным проекта OSI-409 и по результатам стохастического моделирования

Месяц	Средняя абсолютная ошибка (mean absolute error, MAE) полей средней сплочённости, баллы	MAE полей среднеквадратического отклонения сплочённости, баллы
I	0,18±0,05	0,25±0,07
II	0,19±0,06	0,27±0,06
III	0,16±0,04	0,23±0,05
IV	0,18±0,05	0,23±0,04
V	0,23±0,04	0,30±0,05
VI	0,29±0,06	0,30±0,06
VII	0,23±0,06	0,21±0,04
VIII	0,21±0,05	0,25±0,06
IX	0,24±0,06	0,31±0,08
X	0,28±0,06	0,24±0,05
XI	0,19±0,04	0,26±0,07
XII	0,17±0,07	0,25±0,07

мы выполнили расчёт вариограмм для 15 числа каждого месяца 2010 г. (год выбран случайно). Результаты показали, что вариограммы, рассчитанные по наблюдаемым и модельным полям сплочённости, имеют схожий вид и сопоставимые значения дисперсии на всех пространственных сдвигах. На рис. 3 для примера представлены эмпирические вариограммы полей сплочённости для 15 марта и 15 июля: линии 1 – это вариограммы, рассчитанные для исходных спутниковых данных проекта OSI-409, линии 2 – вариограммы, рассчитанные для каждой даты по 20 реализациям стохастического генератора. Как видно из рис. 3, вариограммы, рассчитанные по фактическим данным, находятся внутри облака данных, полученных в ходе 20 независимых реализаций генератора.

Для получения количественных оценок сравнения вариограмм воспользуемся значением расстояния, при котором эмпирическая вариограмма $\gamma(h)$ пересекает значение по оси ординат, равное 9. Это пороговое значение вариограммы выбрано, исходя из соображения, что в номенклатуре морских льдов первые две градации льда по сплочённости содержат 3 балла (редкий лёд – 1–3 балла, разреженный – 4–6 баллов). Радиус вариограммы $h(\gamma = 9)$ можно интерпретировать как расстояние, которое в среднем покрывает одна градация сплочённости. Вариограмма, рассчитанная по полю сплочённости на 15 марта 2010 г, пересе-

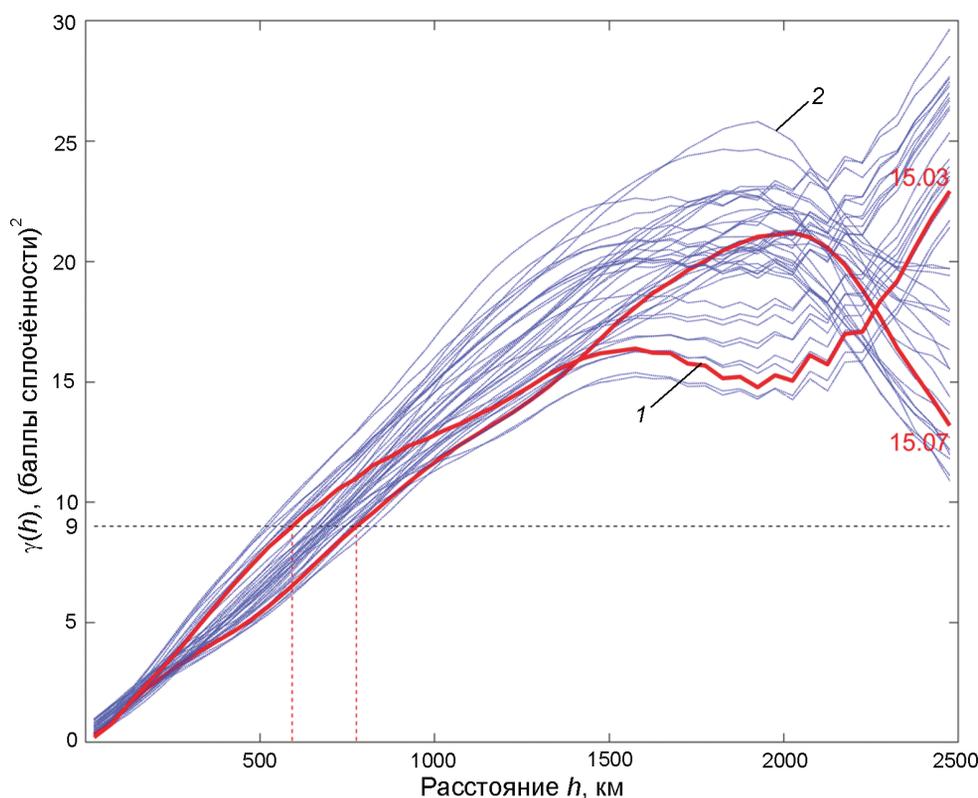


Рис. 3. Примеры вариограмм полей сплочённости для 15 марта и 15 июля 2010 г. по данным проекта OSI-409 (1) и 20 реализациям стохастического генератора (2)

Fig. 3. Examples of variograms of sea ice concentration fields for March 15 and July 15, 2010 according to the OSI-409 project (1), and 20 realizations of the stochastic generator (2)

кает пороговую отметку на сдвиге 592 км; аналогичные показатели $h(\gamma = 9)$ для 20 реализаций генератора находятся в диапазоне от 513 до 741 км, среднее значение радиуса вариограммы составило 623 ± 141 км (в качестве доверительного интервала используется удвоенное значение СКО). Аналогичный радиус вариограммы $h(\gamma = 9)$ для 15 июля 2010 г. равен 776 км по фактическим данным и $h(\gamma = 9) = 730 \pm 90$ км по 20 реализациям стохастического генератора (минимальное значение $h(\gamma = 9) = 663$ км, максимальное – 824 км).

Примеры модельных полей сплочённости, созданных стохастическим генератором ледяного покрова для 15 июня, приведены на рис. 4, где видны такие специфические элементы ледяного покрова, свойственные данному сезону, как Ямальская полынья, Новоземельский и Североземельский ледяные массивы. В результатах расчёта для зимних месяцев (в статье не показаны) отмечаются припай и заприпайные полыньи. Воспроизведение моделью таких особых элементов ледового режима, как припай, полыньи, ледяные массивы, косвенно свидетельствует об адекватности созданного стохастического генератора ледяного покрова и о пригодности его использования для решения различных научных и прикладных

задач, где требуется неограниченная во времени синтетическая информация о ледяном покрове.

Пример использования стохастического генератора ледяного покрова для оценок навигационных параметров на участке трассы Северного морского пути между Баренцевым и Карским морями

Описанную в статье вероятностную модель изменения полей ледяного покрова можно применять для краткосрочного прогностического расчёта ансамбля возможных состояний сплочённости с оценкой вероятности наступления каждого состояния, восстановления недостающего фрагмента поля сплочённости, полученного, например, по спутниковым снимкам. Однако основная задача стохастического генератора – воспроизведение неограниченных по времени синтетических полей ледяного покрова, которые можно использовать для оценок параметров, зависящих от льда, методом Монте-Карло. В качестве примера возможностей использования синтетической информации о ледяном покрове проведём расчёт навигационных параметров на трассах Северного морского пути

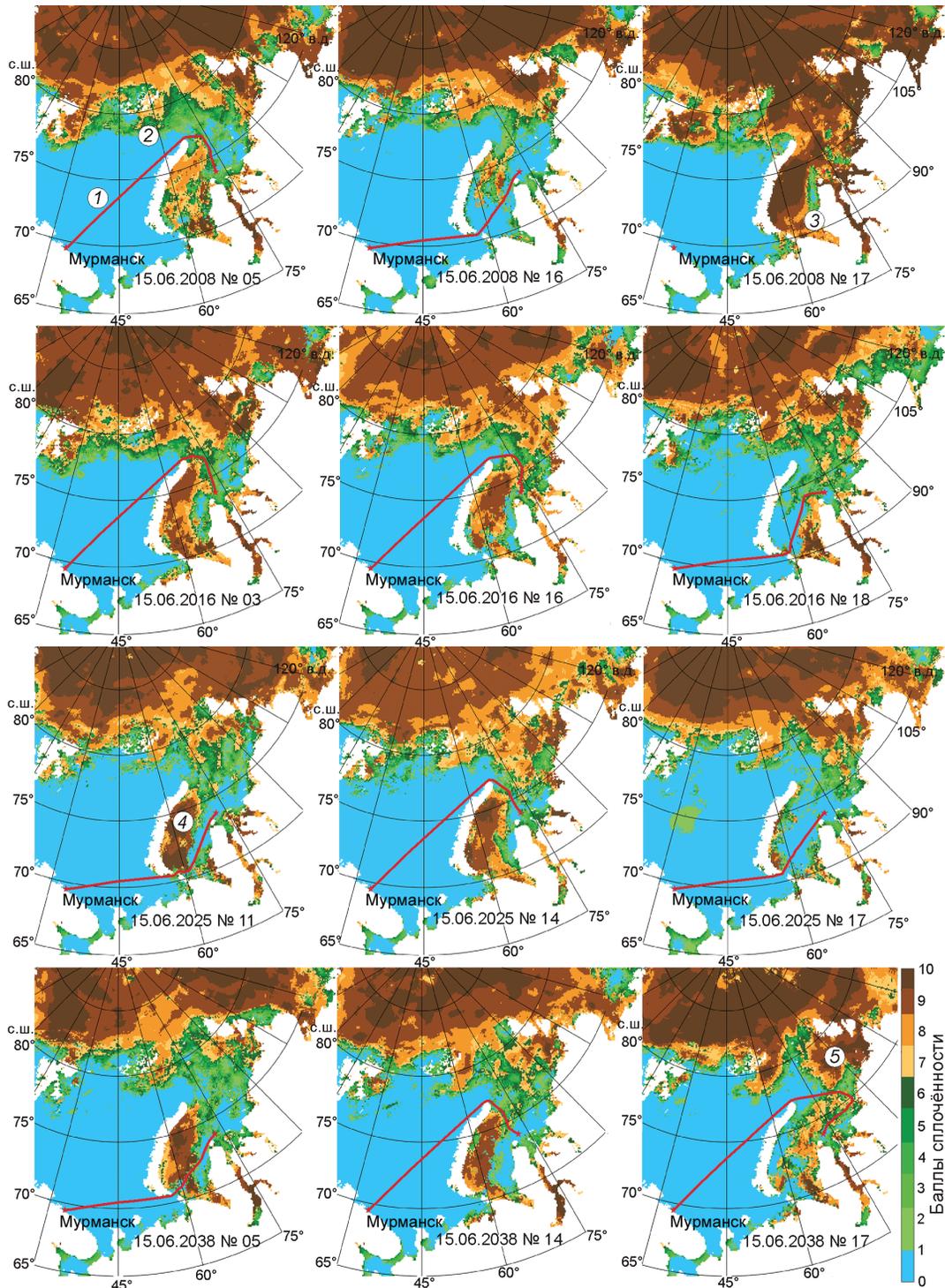


Рис. 4. Примеры синтетических полей сплочённости ледяного покрова, созданные стохастическим генератором для 15 июня, и соответствующие этим полям оптимальные пути судов ледового класса Arc4 на маршруте Мурманск – Обь-Енисейский район.
 1 – оптимальный путь судна; 2 – кромка ледяного покрова; 3 – Ямальская полынья; 4 – Новоземельский ледяной массив; 5 – Североземельский ледяной массив

Fig. 4. Examples of synthetic ice concentration fields, created by a stochastic generator for June 15, and corresponding optimal paths of Arc4 ice class vessels on the route from Murmansk to Ob-Yenisei region.

1 – optimal path of a vessel; 2 – edge of ice cover; 3 – the Yamal polynya; 4 – the Novaya Zemlya ice massif; 5 – the Severnaya Zemlya ice massif

между Баренцевым и Карским морями. Согласно «Правилам классификации и постройки морских судов» Российского морского регистра судоходства [24], для судов класса Arc4, Arc5 и Arc6 навигация во льдах Баренцева и Карского морей допустима в однолетнем разреженном льду (сплочённость 4–6 баллов). Лёд в проливе Карские Ворота и севернее Новой Земли тает летом, поэтому единственным лимитирующим фактором для ледового плавания судов класса Arc4, Arc5 и Arc6 между Баренцевым и Карским морями будет только общая сплочённость льда.

Для оценки навигационных параметров по набору искусственных полей сплочённости использовался метод автоматического нахождения оптимального пути судна во льдах, детально изложенный в работе [17]. Данный метод основан на последовательном расчёте положения виртуальных судов, одновременно вышедших из начальной точки. Рассчитанные с определённой временной дискретностью грани полигонов максимального продвижения судов называются *изохроной*. Начальная точка пути была расположена в незамерзающей части Баренцева моря, а конечная — в районе входа в Обскую губу вне границ припая. В зависимости от скорости судна от каждой вершины изохроны рассчитывались новые полигоны возможного перемещения судна. Объединение этих полигонов даёт новую линию изохроны на следующий временной шаг. При попадании конечной точки внутрь полигона максимального продвижения построение новых изохрон прекращается, а от точки, попавшей в полигон, в обратном порядке рассчитывается оптимальный путь судна, который в методе изохрон представляет собой линию, соединяющую наиболее близкие вершины соседних во времени полигонов изохрон.

Чтобы абстрагироваться от характеристик ледопроеходимости конкретного судна, будем считать, что при сплочённости от 0 до 6 баллов скорость судна не меняется, а при сплочённости льда более 6 баллов скорость судна равна нулю. Такой подход позволяет оценить только формальную возможность или невозможность достижения конечной точки маршрута судном с ледовым классом Arc4. На рис. 4 приведены примеры полей сплочённости, рассчитанные стохастическим генератором, и оптимальные пути плавания судов класса Arc4, соответствующие данному полю сплочённости. В качестве оцениваемых навигационных параметров выступают: дата начала

навигации; дата окончания навигации; продолжительность навигации. Дата начала навигации определяется как первый возможный в данном году оптимальный путь, проведённый между начальной и конечной точками маршрута. Аналогично определяется дата окончания навигации — это последний день года, в который возможно провести маршрут между точками пути.

На основе описанного стохастического генератора были рассчитаны 20 реализаций на отрезок времени с 1980 по 2042 г. Выбранный интервал реализации генератора обусловлен линейным трендом типов ледовитости, рассчитанным по данным проекта OSI-409 (1987–2019 гг.). До и после этого отрезка линейный тренд выдаёт нереалистичные значения типов ледовитости. Таким образом, 2042 г. — предел реализации генератора при выбранном климатическом сценарии. Очевидно, что при аппроксимации изменчивости типов ледовитости другой функцией (полиномиальная функция, тренды с долгопериодными колебаниями) предельная длина реализации и результаты расчёта стохастического генератора будут другими. Однако при исследовании климатических изменений первые оценки такой изменчивости — параметры линейного тренда. Также очевидно, что сама типизация ледовитости, выполненная по данным 1987–2019 гг., будет терять актуальность на концах временного отрезка расчёта стохастического генератора с заданным линейным трендом.

Для каждого дня каждой реализации полученно синтетическое поле сплочённости и по каждому полю сплочённости определена возможность соединить начальную и конечную точки маршрута по чистой воде и льдам сплочённостью менее 6 баллов. Для каждого года каждой реализации были выбраны даты начала и окончания навигации. На рис. 5 приведены даты сроков начала навигации по чистой воде, редким льдам и разреженным льдам на выбранном маршруте. Область, закрашенная голубым цветом, показывает среднее значение \pm удвоенное значение СКО за 20 реализаций — $\mu \pm 2\sigma$. Если предположить, что распределение дат начала и окончания навигации за 20 реализаций генератора соответствует нормальному распределению, то закрашенную область можно интерпретировать как область доверительного интервала с вероятностью $\approx 95,5\%$. Из рис. 5 видно, что даты начала

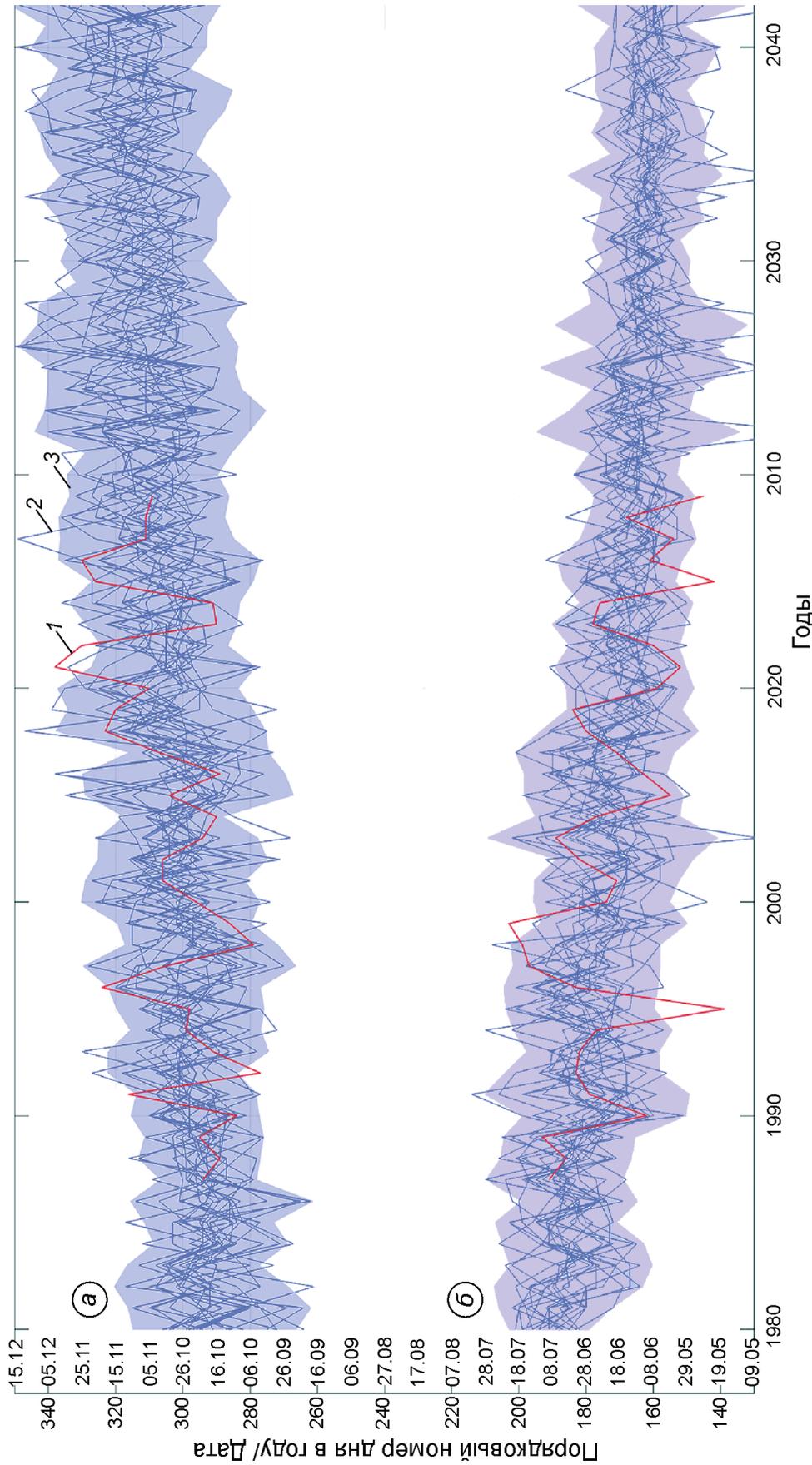


Рис. 5. Результаты расчёта даты начала (а) и окончания навигации судов класса Arc4 (а) на маршруте Мурманск – Обь-Енисейский район по данным проекта OSI-409 (1) и 20 реализациям стохастического генератора (2), $\mu \pm 2\sigma$ (3)
Fig. 5. The results of calculating the date of navigation start (б) and end for Arc4 (а) ice class vessels on the route from Murmansk to Ob-Yenisei region according to the OSI-409 project (1) and 20 realizations of the stochastic generator (2), $\mu \pm 2\sigma$ (3)

Таблица 2. Параметры навигации судов ледового класса Arc4 из Баренцева моря в Обь-Енисейский район Карского моря, оценённые по результатам расчёта стохастического генератора ледяного покрова и исходным данным проекта OSI-409

Отрезок времени, годы	Средняя дата навигации, начало/окончание		Средняя продолжительность навигации, сутки	
	OSI-409	генератор	OSI-409	генератор
1980–1990	—*	04.07/18.10	—	106
1990–2000	28.06/ 21.10	26.06/23.10	116	119
2000–2010	22.06/ 29.10	21.06/27.10	129	128
2010–2020	07.06/09.11	15.06/02.11	155	140
2020–2030	—	11.06/06.11	—	148
2030–2040	—	09.06/10.11	—	153

*Прочерки – данные проекта OSI-409 отсутствуют.

и окончания навигации судов ледового класса Arc4, рассчитанные по исходным данным проекта OSI-409 (линии 1), находятся в массиве дат, рассчитанных по результатам стохастического моделирования (20 линий 2) и имеют схожие тенденции и масштабы изменчивости. Как правило, функция дат начала навигации, рассчитанных по спутниковым данным, лежит внутри области 95,5%-го доверительного интервала, рассчитанного по данным стохастического генератора.

Количественный анализ сроков начала навигации между Баренцевым морем и Обь-Енисейским районом показал, что средняя дата начала навигации по данным проекта OSI-409 за 1987–2019 гг. приходится на 21 июня, а конец навигации – на 29 октября (средняя продолжительность навигации судов класса Arc4 составила 130 дней). Аналогичные параметры, полученные на основе синтетических полей сплочённости, составили 22 июня, 27 октября и 127 дней соответственно. Таким образом, основные навигационные параметры для судов ледового класса Arc4, воспроизведённые моделью и оценённые по спутниковым данным, отличаются всего на несколько суток, что косвенно указывает на качество созданной стохастической модели изменчивости полей сплочённости. Ещё раз отметим, что полученные результаты учитывают параметры льда не в какой-либо точке, линии (установленном ранее маршруте) или полигоне (район возможных маршрутов судов), а во всей расчётной области (т.е. полностью Карское и Баренцево моря, западная часть моря Лаптевых с прилегающими акваториями Арктического бассейна).

Подекадные оценки параметров навигации между Баренцевым морем и Обь-Енисейским районом Карского моря для судов ледового класса Arc4 приведены в табл. 2. Для данных проекта OSI-409 такие оценки доступны толь-

ко для 1990-, 2000- и 2010-х годов, стохастический генератор воспроизвёл такие же оценки для шести десятилетий. Как видно из табл. 2, для 1990- и 2000-х годов характеристики начала и окончания навигации, рассчитанные как по наблюдаемым, так и по смоделированным данным, совпадают: отклонения дат составляют трое суток и менее. Однако за отрезок времени с 2010 по 2020 г. средняя продолжительность навигации, оценённая по данным синтетических полей сплочённости, меньше почти на две недели по сравнению с результатами расчёта параметров навигации по данным проекта OSI-409.

В настоящий момент созданный стохастический генератор ледяного покрова может воспроизводить только те ледовые условия, для которых выведены основные вероятностные закономерности, заложенные в модель. В нашем случае делается прогноз ледовых условий и связанных с ними параметров арктической навигации на несколько десятилетий вперёд, исходя из следующих допущений: а) существуют только пять типов ледовитости, выделенных за 1987–2019 гг.; б) только эти пять типов ледовитости будут отмечаться в будущем. При этом оценённый нами параметр линейного тренда обуславливает наличие в результатах моделирования только I (лёгкий) тип ледовитости после 2030-х годов. В действительности, на данном отрезке времени возможны более лёгкие условия, чем оценённые нами по данным за 1987–2019 гг. Поэтому полученные прогностические оценки параметров арктической навигации могут давать более «суровые» условия, чем они будут на самом деле: а) заниженные оценки для средней даты начала навигации, дисперсии дат начала и конца навигации, средней продолжительности навигации; б) увеличенные оценки для средней

даты окончания навигации. До некоторой степени этот эффект можно будет сгладить введением новых (не существующих в данных наблюдений за 1987–2019 гг.) прогнозируемых типов ледовитости (например, очень лёгкий или нулевой тип ледовитости и т.д.). Для прогнозируемых типов ледовитости можно определить условные функции распределения вероятности как результат экстраполяции функций распределения, диагностированных для пяти типов ледовитости.

Заключение

Разработка вероятностных моделей пространственно-временной изменчивости гидрометеорологических полей — важная задача, подобные модели применяют в различных научных и прикладных сферах. Стохастические модели, воспроизводящие пространственно-временную изменчивость параметров ледяного покрова, также востребованы и могут быть использованы для оценки параметров навигации в Арктике, при стратегическом планировании работы морских транспортных систем, а также при решении прикладных задач из совершенно разных областей знаний.

Здесь описана созданная вероятностная модель сплочённости льда, в которой для имитации временной связанности изменчивости параметров ледяного покрова использованы цепи Маркова. Для придания случайным полям пространственной связанности предварительно были рассчитаны эмпирические поля переходных вероятностей, вычисленные по условной функции распределения вероятностей переходов из одной градации сплочённости в другую и исходными значениями сплочённости в узлах сеточной области. Такой подход, на наш взгляд, может быть применён в стохастических генераторах погоды,

и он позволит устранить проблему «размывания» установленной пространственной корреляции, которая возникает при моделировании случайных полей по характеристикам метеопараметров.

Стохастический генератор ледяного покрова воспроизводит реалистичные изменения полей сплочённости: в результатах моделирования корректно отражаются положение и динамика кромки ледяного покрова, заприпайных полыней, ледяных массивов. Верификация вероятностной модели выполнялась сравнением статистических характеристик (среднее значение и СКО) полей сплочённости, автокорреляционных функций временных рядов ледовитости, вариограмм полей сплочённости на отдельные календарные даты. Во всех случаях результаты стохастического моделирования качественно и количественно были близки к измеренным полям сплочённости.

Объединение стохастического генератора и технологии ледового рутинга (поиска оптимального пути судна во льдах) позволяет перейти к моделированию параметров арктической навигации методом Монте-Карло, где стохастическому генератору отводится роль неограниченного источника синтетической информации о ледяном покрове. В данной статье с использованием стохастического генератора проведён расчёт дат начала и конца навигации судов ледового класса Arc4 между Мурманском и Обь-Енисейским районом. Полученные результаты показывают, что создание стохастического генератора ледяного покрова принципиально возможно, а выбранное направление исследований следует развивать.

Благодарности. Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда (проект № 17-79-20162).

Acknowledgments. The study is supported by the Russian Science Foundation (Project № 17-79-20162).

Литература

1. Richardson C.W. Stochastic simulation of daily precipitation, temperature and solar radiation // *Water Resources Research*. 1981. № 17. P. 182–190. doi: 10.1029/WR017i001p00182.
2. Гельфан А.Н., Морейдо В.М. Динамико-стохастическое моделирование формирования снежного покрова на Европейской территории России // *Лёд и Снег*. 2014. № 2 (126). С. 44–52.

References

1. Richardson C.W. Stochastic simulation of daily precipitation, temperature and solar radiation. *Water Resources Research*, 1981, 17: 182–190. doi: 10.1029/WR017i001p00182.
2. Gelfan A.N., Moreido V.M. Dynamic-stochastic modeling of snow cover formation on the European territory of Russia. *Led i Sneg. Ice and Snow*. 2014, 2 (126): 44–52. [In Russian].

3. *Laslett D., Creagh C., Jennings P.* A method for generating synthetic hourly solar radiation data for any location in the south west of Western Australia, in a world wide web page // *Renewable Energy*. 2014. V. 68. P. 87–102. doi: 10.1016/j.renene.2014.01.015.
4. *Peleg N., Fatichi S., Paschalis A., Molnar P., Burlando P.* An advanced stochastic weather generator for simulating 2-D high resolution climate variables // *Journ. of Advances in Modeling Earth Systems*. 2017. V. 9. P. 1–33. doi: 10.1002/2016MS000854.
5. *Youngman B.D., Stephenson D.B.* A geostatistical extreme-value framework for fast simulation of natural hazard events // *Proc. of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Science*. 2016. № 472 (2189). 20150855. doi: 10.1098/rspa.2015.0855.
6. *Schlabing D., Frassl M.A., Eder M.M., Rinke K., Bardossy A.* Use of a weather generator for simulating climate change effects on ecosystems: A case study on Lake Constance // *Environmental Modelling & Software*. 2014. V. 61. P. 326–338. <http://dx.doi.org/10.1016/j.envsoft.2014.06.028>.
7. *Dubrovsky M., Buchtele J., Zalud Z.* High-frequency and low-frequency variability in stochastic daily weather generator and its effect on agricultural and hydrologic modelling // *Climatic Change*. 2004. V. 63 (1–2). P. 145–179. doi: 10.1023/B:CLIM.0000018504.99914.60.
8. *Keller D.E., Fischer A.M., Liniger M.A., Appenzeller C., Knutti R.* Testing a weather generator for downscaling climate change projections over Switzerland // *Intern. Journ. of Climatology*. 2016. V. 37 (2). P. 928–942. doi: 10.1002/joc.4750.
9. *Ailliot P., Allard D., Monbet V., Naveau P.* Stochastic weather generators: an overview of weather type models // *Journ. de la Société Française de Statistique*. 2015. V. 156 (1). P. 101–113.
10. *Маї Р.И., Таровик О.В., Топаж А.Г.* Моделирование морской погоды как входного сигнала имитационных моделей транспортных и экологических систем в арктическом регионе // *Проблемы экологического мониторинга и моделирование экосистем*. 2018. Т. XXIX. № 3. С. 20–38. doi: 10.21513/0207-2564-2018-3-20-38.
11. *Semenov M.A., Brooks R.J.* Spatial interpolation of the LARS-WG stochastic weather generator in Great Britain // *Climate Research*. 1999. V. 11. P. 137–148. doi: 10.3354/cr011137.
12. *Iwanski S., Kuchar L.* Spatial generation of daily meteorological data // *Acta Scientiarum Polonorum – Formatio Circumiectus*. 2003. V. 2 (1). P. 113–121.
13. *Khalili M., Brissette F., Leconte R.* Stochastic multi-site generation of daily weather data // *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*. 2009. V. 23. № 6. P. 837–849. doi: 10.1007/s00477-008-0275-x.
14. *Bergström M., Erikstad S.O., Ehlers S.* A simulation-based probabilistic design method for arctic sea trans-
3. *Laslett D., Creagh C., Jennings P.* A method for generating synthetic hourly solar radiation data for any location in the south west of Western Australia, in a world wide web page. *Renewable Energy*. 2014, 68: 87–102. doi: 10.1016/j.renene.2014.01.015.
4. *Peleg N., Fatichi S., Paschalis A., Molnar P., Burlando P.* An advanced stochastic weather generator for simulating 2-D high resolution climate variables. *Journ. of Advances in Modeling Earth Systems*. 2017, 9: 1–33. doi: 10.1002/2016MS000854.
5. *Youngman B.D., Stephenson D.B.* A geostatistical extreme-value framework for fast simulation of natural hazard events. *Proc. of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Science*. 2016, 472 (2189): 20150855. doi: 10.1098/rspa.2015.0855.
6. *Schlabing D., Frassl M.A., Eder M.M., Rinke K., Bardossy A.* Use of a weather generator for simulating climate change effects on ecosystems: A case study on Lake Constance. *Environmental Modelling & Software*. 2014, 61: 326–338. <http://dx.doi.org/10.1016/j.envsoft.2014.06.028>.
7. *Dubrovsky M., Buchtele J., Zalud Z.* High-frequency and low-frequency variability in stochastic daily weather generator and its effect on agricultural and hydrologic modelling. *Climatic Change*. 2004, 63 (1–2): 145–179. doi: 10.1023/B:CLIM.0000018504.99914.60.
8. *Keller D.E., Fischer A.M., Liniger M.A., Appenzeller C., Knutti R.* Testing a weather generator for downscaling climate change projections over Switzerland. *Intern. Journ. of Climatology*. 2016, 37 (2): 928–942. doi: 10.1002/joc.4750.
9. *Ailliot P., Allard D., Monbet V., Naveau P.* Stochastic weather generators: an overview of weather type models. *Journ. de la Société Française de Statistique*. 2015, 156 (1): 101–113.
10. *May R.I., Tarovik O.V., Topazh A.G.* Maritime weather as an input data of simulation models of transportation and ecological systems in Arctic regions. *Problemy ekologicheskogo monitoringa i modelirovaniye ekosistem*. *Problems of ecological monitoring and modeling of ecosystems*. 2018, XXIX (3): 20–38. doi: 10.21513/0207-2564-2018-3-20-38. [In Russian].
11. *Semenov M.A., Brooks R.J.* Spatial interpolation of the LARS-WG stochastic weather generator in Great Britain. *Climate Research*. 1999, 11: 137–148. doi: 10.3354/cr011137.
12. *Iwanski S., Kuchar L.* Spatial generation of daily meteorological data. *Acta Scientiarum Polonorum – Formatio Circumiectus*. 2003, 2 (1): 113–121.
13. *Khalili M., Brissette F., Leconte R.* Stochastic multi-site generation of daily weather data. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*. 2009, 23 (6): 837–849. doi: 10.1007/s00477-008-0275-x.
14. *Bergström M., Erikstad S.O., Ehlers S.* A simulation-based probabilistic design method for arctic sea trans-

- port systems // Journ. of Marine Science and Application. 2016. № 15. P. 349–369. doi: 10.1007/s11804-016-1379-1.
15. Третьяков В.Ю., Фролов С.В., Сарафанов М.И. Результаты компьютерного моделирования вероятности аварийных ситуаций из-за сжатий судов дрейфующими льдами на участке Северного морского пути // Российская Арктика. 2019. № 5. С. 4–11. doi: 10.24411/2658-4255-2019-10051.
 16. Topaj A., Tarovik O., Bakharev A.A. Modification of ship routing algorithms for the case of navigation in ice // Proc. of the 25th Intern. Conf. on Port and Ocean Engineering under Arctic Conditions (POAC-2019), Delft, The Netherlands. June 9–13. 2019. 12 p.
 17. May R.I., Fedyakov V.E., Frolov S.V., Tarovik O.V., Topaj A.G. Method for finding the optimal ship route in ice based on vector geo-algorithms // Intern. Journ. of Offshore and Polar Engineering. 2020. № 30 (1). P. 78–85.
 18. Lavergne T., Tonboe R., Lavelle J., Eastwood S. Algorithm Theoretical Basis Document for the OSI SAF Global Sea Ice Concentration Climate Data Record. OSI-450, OSI-430-b. Version 1.2. EUMETSAT Ocean and Sea Ice SAF High Latitude Processing Centre. 2019. 33 p.
 19. Трапезников Ю.А., Чепурина М.А. Вероятностная модель ледовитости арктических морей // Вероятностный анализ и моделирование океанологических процессов. Л.: Гидрометеиздат, 1984. С. 39–42.
 20. Wilks D. Multisite generalization of a daily stochastic precipitation generation model // Journ. of Hydrology. 1998. № 210 (1). P. 178–191. doi: 10.1016/S0022-1694(98)00186-3.
 21. Пригарин С.М. Методы численного моделирования случайных процессов и полей. Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, 2005. 259 с.
 22. Dolloff J., Doucette P. The Sequential Generation of Gaussian Random Fields for Applications in the Geospatial Sciences // ISPRS. Intern. Journ. of Geo-Information. 2014. V. 3. P. 817–852. doi: 10.3390/ijgi3020817.
 23. Schlather M., Malinowski A., Menck P.J., Oesting M., Strokorb K. Analysis, simulation and prediction of multivariate random fields with package RandomFields // Journ. of Statistical Software. 2015. V. 63. № 8. P. 1–25. doi: 10.18637/jss.v063.i08.
 24. Правила классификации и постройки морских судов. Ч. I. Классификация. СПб.: Российский морской регистр судоходства, 2017. 60 с.
 15. Tretyakov V.Yu., Frolov S.V., Sarafanov M.I. Results of computer modeling of the probability of emergency situations due to the compression of ships by drifting ice on the section of the Northern Sea Route. *Rossiyskaya Arktika*. Russian Arctic. 2019, 5: 4–11. doi: 10.24411/2658-4255-2019-10051.
 16. Topaj A., Tarovik O., Bakharev A.A. Modification of ship routing algorithms for the case of navigation in ice. Proc. of POAC-2019, Delft. The Netherlands. June 9–13. 2019: 12 p.
 17. May R.I., Fedyakov V.E., Frolov S.V., Tarovik O.V., Topaj A.G. Method for finding the optimal ship route in ice based on vector geo-algorithms. Intern. Journ. of Offshore and Polar Engineering. 2020, 30 (1): 78–85.
 18. Lavergne T., Tonboe R., Lavelle J., Eastwood S. Algorithm Theoretical Basis Document for the OSI SAF Global Sea Ice Concentration Climate Data Record. OSI-450, OSI-430-b. Ver. 1.2. EUMETSAT Ocean and Sea Ice SAF High Latitude Processing Centre. 2019: 33 p.
 19. Trapeznikov Yu.A., Chepurina M.A. Probabilistic model of ice coverage of the Arctic seas. *Veroyatnostny analiz i modelirovaniye okeanologicheskikh protsessov*. Probabilistic analysis and modeling of oceanological processes. Leningrad: Gidrometeoizdat, 1984: 39–42. [In Russian].
 20. Wilks D. Multisite generalization of a daily stochastic precipitation generation model. Journ. of Hydrology. 1998, 210 (1): 178–191. doi: 10.1016/S0022-1694(98)00186-3.
 21. Prigarin S.M. *Metody chislennogo modelirovaniya sluchaynykh protsessov i poley*. Numerical Modeling of Random Processes and Fields. Novosibirsk: ICMiMG SB RAS, 2005: 259 p. [In Russian].
 22. Dolloff J., Doucette P. The Sequential Generation of Gaussian Random Fields for Applications in the Geospatial Sciences. ISPRS. Intern. Journ. of Geo-Information. 2014, 3: 817–852. doi: 10.3390/ijgi3020817.
 23. Schlather M., Malinowski A., Menck P.J., Oesting M., Strokorb K. Analysis, simulation and prediction of multivariate random fields with package RandomFields. Journ. of Statistical Software. 2015, 63 (8): 1–25. doi: 10.18637/jss.v063.i08.
 24. Rules for the classification and construction of sea-going ships. Part I. Classification. SPb.: Russian Maritime Register of Shipping, 2017: 48 p.