

Моделирование динамики приливного ледника Ханса (Шпицберген) на основе стохастической модели

© 2019 г. А.В. Кислов^{1*}, А.Ф. Глазовский²

¹Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия;

²Институт географии РАН, Москва, Россия

*avkisllov@mail.ru

Simulation of the dynamics of the Hansbreen tidal glacier (Svalbard) based on the stochastic model

A.V. Kislov^{1*}, A.F. Glazovsky²

¹Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia; ²Institute of Geography, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

*avkisllov@mail.ru

Received April 5, 2019 / Revised May 29, 2019 / Accepted June 13, 2019

Keywords: modeling, Svalbard, tidal (tidewater) glacier, the Fokker-Planck equation, the Langevin equation.

Summary

The dynamics of the Hansbreen tidal glacier (Svalbard) is manifested at different time scales. In addition to the long-term trend, there are noticeable inter-annual fluctuations. And the last ones are precisely the subject of this work. Based on general conclusions of the theory of temporal dynamics of the massive inertial objects, the observed inter-annual changes in the length of the glacier can be explained as a result of the accumulation of anomalies of the heat fluxes and water flows. In spite the fact that the initial model of glacier dynamics is deterministically based on the physical law of conservation of ice mass (the so-called the «minimal model» was used), the model of length change is interpreted as stochastic. From this standpoint, it is the Langevin equation, which includes the effect of random temperature anomalies that can be interpreted as a white noise. From a mathematical point of view, this process is analogous to Brownian motion, i.e. the length of the Hansbreen glacier randomly fluctuates in the vicinity of its stable equilibrium position. Based on the Langevin equation, we passed to the Fokker–Planck equation, the solution of which allowed us to obtain the distribution function of the probabilities of inter-annual fluctuations of glacier length, which is close to the normal law. It was shown that the possible range of the variability covers the observed interval of the length fluctuations. The pdf is close to normal distribution.

Citation: Kislov A.V., Glazovsky A.F. Simulation of the dynamics of the Hansbreen tidal glacier (Svalbard) based on the stochastic model. *Led i Sneg. Ice and Snow*. 2019. 59 (4): 452–459. [In Russian]. <https://doi.org/10.15356/2076-6734-2019-4-441>.

Поступила 5 апреля 2019 г. / После доработки 29 мая 2019 г. / Принята к печати 13 июня 2019 г.

Ключевые слова: моделирование, приливный ледник, уравнение Ланжевена, уравнение Фоккера–Планка, Шпицберген.

Для моделирования межгодовой динамики длины ледника Ханса на Шпицбергене использована «минимальная модель», интерпретируемая как стохастическое уравнение Ланжевена с переходом к уравнению Фоккера–Планка. Получена формула, выражающая дисперсию колебаний длины ледника в зависимости от его параметров. Сопоставление расчётов с данными наблюдений позволило получить хорошие результаты.

Введение

Ледник Ханс — приливный ледник длиной около 15 км, стекающий в залив Хорнсунн в южной части о. Шпицберген и занимающий площадь 56,7 км² в интервале высот от 0 до 500 м. Его язык шириной 2,5 км оканчивается в море ледяным фронтом протяжённостью 1,5 км, продуцирующим айсберги. Толщина льда на фронте — около 100 м, из которых примерно половина находится ниже уровня моря. Макси-

мальная толщина ледника достигает 400 м [1]. На расстоянии 4 км от фронта ложе ледника имеет обратный уклон и на протяжении 10 км лежит ниже уровня моря. Ледник имеет поли-термическое строение, а толщина верхнего слоя холодного льда изменяется от 20 до 90 м. Выше фирновой линии этот слой исчезает.

Ледник Ханс исследуется с конца XIX в. За это время он сократился примерно на 3,5 км (по данным [2]). Систематические детальные наблюдения за положением конца ледника Ханс на-

чались в 1980-х годах. Было показано, что динамика фронта имеет чёткое сезонное поведение: максимум откола айсбергов наблюдается в августе–ноябре, тогда как в весеннее время (февраль–июнь) фронт ледника продвигается, а отёл практически отсутствует [3, 4]. Полученные данные позволили нам оценить среднеквадратическое отклонение межгодовых изменений фронта, которое за период с 1982 по 2016 г. составило около 114 м.

Наблюдения за поверхностным балансом массы ледника ведутся с 1989 г. Согласно этим данным, средний зимний баланс составляет +0,96 м вод. экв., летний равен –1,31 м вод. экв., а средний чистый баланс – –0,33 м вод. экв., но характеризуется большой межгодовой изменчивостью [2]. Потеря массы из-за отёла вносит значительный вклад в общий баланс массы и по расчётам за 2000–2008 гг. равнялась –0,40 м вод. экв., с максимумом –0,85 вод. экв. в 2008/09 балансовом году. Таким образом, общий средний годовой баланс оценивается величиной около –0,8 м вод. экв. Средняя высота границы питания составляла около 370 м, для неё характерна большая межгодовая изменчивость в пределах от 500 до 260 м в течение последних 20 лет наблюдений [4].

Имеющиеся длинные ряды наблюдений на этом леднике уже использовались исследователями для оценки разных моделей отступления приливного ледника и механизмов, регулирующих его отёл и положение фронта [3, 5, 6]. С разной степенью детальности рассматривались такие факторы, как изменения климатических условий, особенности геометрии ложа ледника, температура прилегающих вод, ледовитость фьорда. Особенность подхода, используемого в настоящей статье, – развитие направления, связанного с моделированием. Эволюция ледника определяется балансом его массы (аккумуляцией, абляцией и айсберговым стоком) и особенностями движения. В настоящее время созданы успешно развиваемые модели, построенные на основе трёхмерной динамики вязко-пластичного тела (см., например, [7]). Однако этот подход сложен для реализации из-за отсутствия надёжной информации о параметрах ледника (распределения плотности вещества в теле ледника; его состояние: вода–снег–фирн–лёд; данные о компонентах тензора напряжений и др.), а также об особенностях горных пород, подстилающих ледник, и

рельефа, которые неодинаковы вдоль профиля и по разному меняются от одного ледника другому.

В меньшей степени от деталей механики движения зависит долгопериодная (межгодовая) эволюция ледника. Здесь на первый план выходит согласованность бюджета массы и динамики льда, приводящая ледник к определённому равновесному профилю. При этом объём ледника, его протяжённость и мощность связаны между собой простыми соотношениями и возможно построение моделей, которые иногда называют из-за их упрощённости «минимальными моделями» [8]. В этом случае возможно интегральное, т.е. не имеющее пространственного разрешения описание ледника, основной параметр которого – длина ледника L . Для более коротких флуктуаций (например, сезонных) роль механики льда становится очень важной, поэтому для моделирования поведения ледника необходимы детальные модели вместе с заданным его исходным состоянием.

Следуя работе [8], рассмотрим модель однородного (по плотности) ледника на склоне с постоянным наклоном ν . Положение склона вдоль горизонтальной координаты x задаётся как $b_0 - \nu x$, где b_0 – высота верхней границы ледника. Будем считать, что климатический баланс массы представлен линейной зависимостью от высоты границы питания E с коэффициентом пропорциональности β . Данная аппроксимация сразу сужает применимость реализованного далее подхода, поскольку такого рода закон характерен не для всех ледников. Принципиальная позиция теории состоит в том, что ледник всегда имеет равновесный профиль. Это означает, в частности, что длина ледника и средняя толщина ледника связаны соотношением $H_m = \alpha L^{1/2}/(1 + \mu\nu)$, в котором α , ν и μ – эмпирические параметры конкретного ледника. Параболический характер этой функции мотивируется, например, в исследовании [9]. При таких условиях уравнение баланса массы трансформируется в уравнение, описывающее длину ледника [8]. Это очень удобно, так как возможно прямое сопоставление результатов расчётов с данными наблюдений.

В данном уравнении воздействие на динамику ледника потоков тепла и влаги (внешние воздействия) сосредоточено в вариациях высоты границы питания E , а учёт айсбергового стока параметризован таким образом, что расход льда в море на фронте ледника пропорционален глу-

бине воды перед ним (с коэффициентом пропорциональности c , имеющим размерность год^{-1} [8]) и толщине ледника на фронте, которая может быть выражена через среднюю толщину ледника как kH_m (в рассматриваемых условиях ледника Ханса $k = 0,45$). Согласно измерениям, айсберговые потери эквивалентны дополнительным потерям в среднем по всей поверхности около 0,9 м льда в год, что при длине ледника 15 км соответствует 13 500 м²/год. Полагая, как и ранее, ледник одномерным образованием, расположенным на склоне с постоянным наклоном, запишем выражение, характеризующее отток массы за счёт образования айсбергов следующим образом: $F = ckH_m(b_0 - \nu L)$; для ледника Ханса $c = 1 \text{ год}^{-1}$. Несмотря на различный физический смысл, константы входят в данное выражение в виде произведения, поэтому фактически речь идёт об одной величине ck .

Переход от уравнения баланса массы к уравнению для L приводит к следующему выражению [8]:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{2(1+\mu\nu)}{3\alpha} \left[-\frac{1}{2}\beta\nu L^{3/2} + \frac{\alpha\beta - \alpha\nu ck}{1+\mu\nu} L + \beta(b_0 - E)L^{1/2} + \frac{\alpha b_0 ck}{1+\mu\nu} \right]. \quad (1)$$

Уравнение (1) может рассматриваться как базовое выражение для различных задач. Однако для его использования необходимо дать определение величины E . С этой целью использованы разные подходы, приводившие к различным постановкам задачи. Так, применение априорно задаваемых вариаций высоты линии равновесия в специальной форме позволило воспроизвести сложное поведение, характеризующее бифуркационной диаграммой, что было использовано для объяснения тысячелетних циклических вариаций ледника за время голоцена [5]. В этой же работе численно решена задача прогноза динамики ледника в XXI в. Этот «внешний» эффект введён в данное уравнение в следующем виде: предполагалось, что до середины XIX в. изменения отсутствуют, а затем включается линейный тренд (призванный отразить эффект нарастающего глобального потепления), на который дополнительно накладываются хаотические флуктуации, аппроксимируемые функцией нормального распределения. В такой форме был дан прогноз длины ледника при изменениях климата XXI в.

В работах [10–12] анализировался ледник, полностью расположенный на суше. Функция

$E = E(t)$, активирующая его динамику, задавалась в форме случайного процесса как белый шум. За счёт этого уравнение (1) переходило в разряд стохастического дифференциального уравнения (уравнения Ланжевена), описывающего случайный процесс Орнштейна–Уленбека с поиском функции распределения вероятности. При этом параметры данной функции определялись, исходя из детерминированных принципов закона сохранения массы, отражением которого служит уравнение (1). В ряде работ также использована идея вычисления вариаций потоков тепла и влаги в форме белого шума, однако в этих случаях параметры поведения ледника определялись на основе статистического анализа [8]. В работе [13] уравнение эволюции приливного ледника также рассматривается как стохастическое, однако математическая модель создана на основе так называемого управляющего уравнения, применяемого к описанию марковского процесса.

Акцент в настоящей статье сделан на исследовании межгодовой изменчивости длины приливного ледника Ханса. В рамках стохастического подхода предложена стационарная модель, причём предполагается, что вариации фронта ледника имеют сходную статистику с теми, которые в реальности происходили на фоне упомянутого ранее тренда. Это обстоятельство позволяет решить вопрос о верификации модельных данных на основе результатов наблюдений. Предлагаемая в данной работе модель позволяет оценить важные свойства динамики ледника, используя набор его параметров, что может найти практическое применение в гляциологии для оценки значимости колебаний ледников при изменениях климата.

Анализ положения равновесия ледника

Запишем уравнение (1) в более удобной форме, сделав замену переменных $L^{1/2} = y$:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1+\mu\nu}{3\alpha} \left[-\frac{1}{2}\beta\nu y^2 + \frac{\alpha\beta - \alpha\nu ck}{1+\mu\nu} y + \beta(b_0 - E) + \frac{\alpha b_0 ck}{(1+\mu\nu)y} \right]. \quad (2)$$

Для ледника Ханса использованы следующие параметры: $L_0 = 15\,000$ м ($y_0 = 122,5 \text{ м}^{1/2}$), $\alpha = 3 \text{ м}^{1/2}$, $\beta = 0,006 \text{ год}^{-1}$, $\mu = 10$, $\nu = 0,023$, $b_0 = 2\,40$ м, $ck = 0,45 \text{ год}^{-1}$. Чтобы исследовать равновесное состояние, рассмотрим усло-

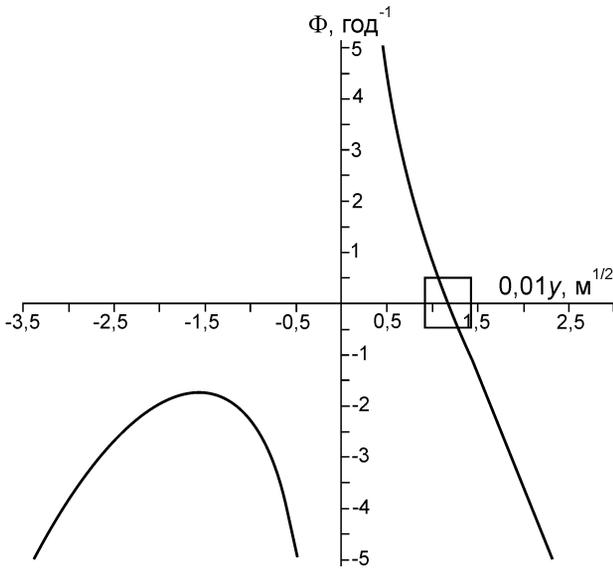


Рис. 1. График функции $\Phi(y) = 0$, построенный в системе Advanced Grapher.

Для рассматриваемой задачи имеет смысл только фрагмент функции внутри области, выделенной прямоугольником

Fig. 1. The graph of the function $\Phi(y) = 0$ generated by the Advanced Grapher.

For the problem under consideration, only a fragment of the function within the rectangle area makes sense

вие $dy/dt = 0$. Приравняем к нулю правую часть уравнения (2), которую обозначим как $\Phi(y)$. График этой функции при заданных параметрах (и при предположении, что $E \sim b_0$) приведён на рис. 1. Состояние равновесия достигается при $y_s = 118 \text{ м}^{1/2}$, в окрестностях которой функция $\Phi(y)$ убывает практически линейно. Разложим эту функцию в степенной ряд в малой окрестности y_s : $\Phi(y) \approx \Phi(y_s) + \Phi'(y_s)\delta y$. Поскольку $\Phi(y_s) = 0$, поведение $\Phi(y)$ определяется производной, знак которой отрицателен.

Таким образом, применённый метод малых возмущений показывает, что стационарная позиция y_s есть устойчивое положение равновесия, т.е. при заданном наборе параметров ледник стремится иметь эту длину (отметим, что y_s близко к y_0). Поэтому можно предположить, что флуктуации теплового и водного баланса, которые в следующем разделе будут трактоваться как «внешние случайные аномалии», хаотически «раскачивают» ледник около данного положения равновесия. Эти отклонения характеризуются, по-видимому, некоторой функцией распределения вероятности. В следующих разделах ставится и решается задача её определения.

Переход к модели стохастической динамики ледника

Уравнение (2) можно существенно упростить, если учесть, что ежегодные вариации длины ледников весьма малы по сравнению с его средними размерами. Действительно, как было показано во Введении, вариации фронта ледника измеряются десятками метров, что составляет порядка 1% его длины. В этом случае уравнение (2) может быть линеаризовано относительно среднего (равновесного) значения, т.е. принимается, что $y = y_0 + \Delta y$ и $E = E_0 + \delta E$. Отметим, что малость изменений в данном случае представляется естественным, физически обоснованным условием, поскольку это подразумевает, что, несмотря на изменения, мы продолжаем работать с тем же объектом. В этом случае, после некоторых преобразований, имеем

$$\frac{d\Delta y}{dt} = - \left[\frac{1+\mu\nu}{3\alpha} \beta \nu y_0 - \frac{\beta}{3} + \frac{\nu ck}{3} + \frac{b_0 ck}{3y_0^2} \right] \Delta y - \frac{(1+\mu\nu)\beta E_*}{3\alpha} z(t). \quad (3)$$

Здесь использовано представление $\delta E = E_* z(t)$, в котором первый множитель определяет масштаб нормированных безразмерных флуктуаций $z(t)$. Обозначим выражение в квадратных скобках как λ . При заданных параметрах (см. ранее) $\lambda = 0,0062 \text{ год}^{-1}$, тогда λ^{-1} равно ~ 160 лет. Это – характерное время динамики ледника. Введём новую переменную $x = \Delta y/y_0$. Обозначив множитель перед $z(t)$ (поделённый на y_0) в формуле (3) как g , перепишем уравнение (3) в сокращённой форме:

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda x - g z(t). \quad (4)$$

В уравнении (4) нестабильность высоты линии равновесия, вызванная совместным влиянием составляющих теплового и водного балансов, порождает короткопериодные разнознаковые вариации длины ледника, временная изменчивость которых характеризуется функцией $z(t)$. Их статистическое поведение определяется автокорреляционной функцией (рис. 2). Данная функция сразу, на годовом сдвиге, уходит в ноль и дальше остаётся внутри статистически незначимого диапазона значений. Это означает, что связность флуктуаций не превышает одного года. Следовательно, при рассмотрении долговременной многолетней динамики ледника ряд годовых

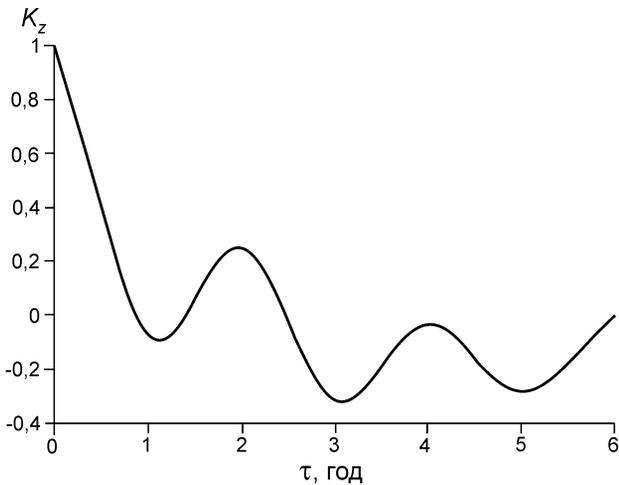


Рис. 2. Автокорреляционная функция K_Z годовых приращений фронта ледника Ханс, построенная по ряду наблюдений с 1982 по 2016 г. с пропусками нескольких лет

Fig. 2. Autocorrelation function K_Z of annual increments of the Hansbreen front, based on observations from 1982 to 2016, with omissions of several years

приращений может быть аппроксимирован так называемым дельта-коррелированным процессом (фурье-образ которого – спектр так называемого белого шума) с корреляционной функцией

$$K_z(\tau) = \langle z(t + \tau)z(t) \rangle = 2D_z \delta(\tau), \quad (5)$$

где $\delta(\tau)$ – дельта-функция; D_z – величина, традиционно называемая коэффициентом диффузии и определяемая в этом случае как

$$D_z = \sigma_z^2 \tau_z, \quad (6)$$

где σ_z^2 – дисперсия процесса $z(t)$; τ_z – время его корреляции, причём, как только что было установлено, $\tau_z = 1$ год.

Поскольку $\tau_z \ll \lambda^{-1}$, это означает, что ледник из-за большой инерционности не успевает подстраиваться под каждую аномалию и эффекты запаздывания реакции приводят к «накоплению» эффектов, в результате чего происходит медленное (с характерным временем λ^{-1}) приспособление к статистическому режиму флуктуаций. Спектр медленных изменений имеет своеобразную форму так называемого красного шума. Уравнение (4), рассматриваемое вместе с условием (5), трактуется как стохастическое дифференциальное уравнение Ланжевена. Изначально оно было получено для описания броуновского движения, однако математический аппарат при-

меним к различным задачам, в том числе и к задачам геофизики и географии [10, 11, 14–16].

Как известно, явления, описываемые уравнением Ланжевена, можно рассмотреть и с точки зрения уравнения Фоккера–Планка, применяемого для характеристики плотности вероятности $p(x, t)$ [15, 16]. В данном конкретном случае получаем:

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} - \lambda \frac{\partial xp(x, t)}{\partial x} = D_z g^2 \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2}.$$

Рассмотрим стационарное решение (при $\partial p(x, t)/\partial t = 0$), отражающее ситуацию, в которой накопленная сумма случайных воздействий разных знаков уравновешена медленной динамикой ледника. В результате интегрирование приводит к решению в виде функции Гаусса (7), причём вычисление постоянной интегрирования получается из определения плотности вероятности

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1:$$

$$p(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right); \quad (7)$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{D_z g^2}{\lambda}}. \quad (8)$$

Формула (8) может быть получена из решения уравнения (4) с условиями (5) и (6) [10]: в рассматриваемом стационарном случае стандартное отклонение не зависит от времени и динамика имеет характер установившихся нерегулярных флуктуаций вблизи положения равновесия. Согласно формуле (8), требуется, чтобы λ было > 0 . Однако, поскольку λ собирается как комбинация различных величин, часто получаемых разными коллективами исследователей, это условие положительной определённости не всегда может автоматически выполняться. Поэтому согласование параметров, устанавливаемое неравенством $\lambda \equiv \frac{1 + \mu\nu}{\alpha} \beta \nu y_0 - \beta + \nu ck + \frac{b_0 ck}{y_0^2} > 0$, представляется принципиально важным.

Для определения коэффициента диффузии требуется знать многолетнее поведение вариаций границы питания. Такой информации нет, но приблизительно можно определить вариации высоты δE через известные изменения температуры с высотой H . Действительно, задавая про-

филь температуры в виде $T = \gamma H + C$ (γ примем равным 0,005 К/м, что соответствует типичным значениям градиента температуры воздуха в высоких широтах в морском климате [17]), получим: $\sigma_T \sim \gamma \sigma_{\delta E}$ и $\sigma_{\delta E} \sim \gamma^{-1} \sigma_T$. Принимая $\sigma_T = 1$ К, получим, что $\sigma_z \sim \sigma_{\delta E} / E_* = 1$. Данный подход, когда температурные вариации вдоль горного склона заменяются изменениями температуры в свободной атмосфере, может быть принят только в первом приближении. Тем не менее, он использован в работах [8, 12], причём в последней работе, кроме данного подхода, использованы два других метода и все они дали близкие и достаточно разумные результаты.

Имея в виду параметры ледника Ханса (см. ранее), получено, что $\sigma_x^2 = 0,0072$. Чтобы перейти к размерной величине стандартного отклонения длины ледника, необходимо рассчитать $\sigma_x^2 y_0^2$. Эта величина получилась равной 108 м. Сопоставление этого теоретического результата с представленной во Введении величиной стандартного отклонения, рассчитанной по данным измерений, позволяет констатировать их очень хорошее соответствие. Формулы (7) и (8), записанные для распределения вероятности нормированных значений, могут быть применены к различным ледникам. Конечно, для этого необходимо в каждом конкретном случае задать их индивидуальные параметры.

Функция распределения вероятности длины ледника Ханса

Зная функцию распределения $p(x)$, можно, используя стандартные методы теории вероятностей, получить выражение для $p(L)$. При этом принимается во внимание связь аргументов этих функций: поскольку $x = (\sqrt{L} - \sqrt{L_0}) / \sqrt{L_0}$, то $L = L_0(x + 1)^2$ и $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{L/L_0}$. В результате имеем:

$$p(L) = \frac{1}{2\sigma_x \sqrt{2\pi L_0 L}} \left\{ \exp \left[-\frac{\left(\sqrt{\frac{L}{L_0}} + 1 \right)^2}{2\sigma_x^2} \right] + \exp \left[-\frac{\left(\sqrt{\frac{L}{L_0}} - 1 \right)^2}{2\sigma_x^2} \right] \right\}.$$

Расчёты показывают, что первое слагаемое в фигурных скобках этой формулы на много по-

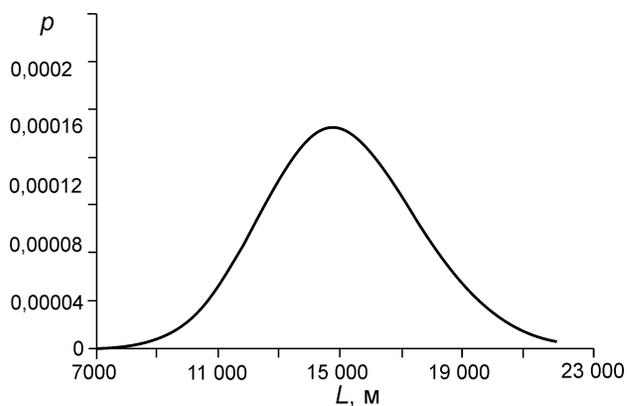


Рис. 3. Функция распределения вероятности p длины L , м, ледника Ханс в стационарных условиях
Fig. 3. Probability distribution function p of the Hansreen length L , m, in stationary conditions

рядков меньше второго, поэтому итоговая формула имеет следующий вид:

$$p(L) = \frac{1}{2\sigma_x \sqrt{2\pi L_0 L}} \left\{ \exp \left[-\frac{\left(\sqrt{\frac{L}{L_0}} - 1 \right)^2}{2\sigma_x^2} \right] \right\}.$$

На рис. 3 показана функция $p(L)$. Её экстремум близок к позиции устойчивого равновесия, отклонения от которого создаются быстрыми (по сравнению с темпами эволюции ледника) аномалиями теплового и водного баланса. Сравнение формы $p(L)$ с функцией Гаусса показывает их большую близость, особенно в центральной области, где решение линеаризованной задачи наиболее адекватно реальности.

Заключение

В настоящей работе развита теория, позволяющая оценивать особенности динамики ледника, погружённого в море. В её основе лежит общая идея неравновесной статистической физики о том, что инерционные системы, управляемые быстро флуктуирующими воздействиями, способны находиться в стационарном состоянии, которое создаётся балансом медленных изменений и статистических характеристик накопленных случайных воздействий. Количественные результаты даёт математический ап-

парат броуновского движения, основанный в данной работе на интерпретации закона сохранения массы ледника (выраженного так называемой «минимальной моделью») в форме стохастического уравнения Ланжевена, а затем – в виде уравнения Фоккера–Планка. Отметим, что коэффициенты стохастического уравнения (а затем и параметры функции распределения и моментов распределения) получены не из результатов статистической обработки данных наблюдений, а исходя из «первых принципов» – закона сохранения массы.

На основе решения уравнения Фоккера–Планка получена функция распределения вероятности длины ледника, которая, с практической точки зрения, оказалась весьма близка к гауссовой кривой. Параметром функции распределения служит стандартное отклонение межгодовых флуктуаций длины ледника, которое в размерной форме, в метрах, имеет следующий вид:

$$\sigma_L \equiv \sigma_x^2 y_0^2 = \frac{D_z (1 + \mu\nu)^2 \beta^2 E_*^2}{3\alpha^2 \left[\frac{1 + \mu\nu}{\alpha} \beta \nu y_0 - \beta + \nu ck + \frac{b_0 ck}{y_0^2} \right]}$$

Возможность расчёта σ_L на основе их параметров, даже при отсутствии длительного мониторинга динамики фронта, очень важна для определения статистической значимости трендов, связанных с длительными перестройками фоновых условий, главным образом в контексте современных изменений в условиях глобального потепления. Теоретическая модель ледника в стационарном состоянии оказалась способ-

на воспроизвести σ_L близко к стандартному отклонению наблюдаемых межгодовых флуктуаций фронта ледника. Это говорит о том, что два процесса – тренд (длительные (междекадные) изменения) и короткопериодные (межгодовые) флуктуации – можно рассматривать как аддитивные, накладывающиеся друг на друга без эффектов взаимодействия.

Теория, применённая к конкретному леднику, показала успешные результаты (без каких-либо калибровочно-настроечных манипуляций), несмотря на естественную в таких случаях неполноту информации и грубость различных априорных предположений. Разумность базовых позиций позволяет критически оценить необходимую точность определения тех или иных параметров. В частности, на этой основе установлено необходимое условие согласованности параметров ледника, вытекающее из требования $\lambda > 0$.

Благодарности. А.В. Кислов благодарен за поддержку этой работы гранту РФФИ № 18-05-60147 и финансированию госбюджетной темы АААА-А16-116032810086-4. А.Ф. Глазовский благодарен за поддержку этой работы гранту РФФИ № 18-05-60109 и финансированию по Госзаданию 0148-2019-0004 (АААА-А19-119022190172-5).

Acknowledgments. A.V.Kislov was supported by the RFBR grant № 18-05-60147 and the State funding АААА-А16-116032810086-4. A.F.Glazovsky was supported by the RFBR grant № 18-05-60109 and acknowledge funding from the State Contract 0148-2019-0004 (АААА-А19-119022190172-5).

Литература

1. Яния Я., Мачерет Ю.Я., Наварро Ф.Х., Глазовский А.Ф., Василенко Е.В., Лапасаран Х., Гловацки П., Мигала К., Балут А., Пивовар Б.А. Вариации гидротермической структуры политермического ледника Ханс на Шпицбергене // МГИ. 2005. № 99. С. 75–88.
2. WGMS. Fluctuations of Glaciers Database. 2018. World Glacier Monitoring Service, Zürich, Switzerland. Online access: 04.04.2019. <http://dx.doi.org/10.5904/wgms-fog-2018-11>.
3. Vieli A., Jania J., Kolondra L. The retreat of a tidewater glacier: observations and model calculations on Hansbreen, Spitsbergen // Journ. of Glaciology. 2002. V. 48. № 163. P. 592–600. <https://doi.org/10.3189/172756502781831089>.

References

1. Jania J., Macheret Yu.Ya., Navarro F., Glazovsky A.F., Vasilenko E.V., Lapazaran J., Glovacki P., Balut A., Pivovarov B.A. Variations of the hydrothermal structure of the Hansbreen polythermal glacier in Svalbard. *Materialy Glyatsiologicheskikh Issledovaniy*. Data of Glaciological Studies. 2005, 99: 75–88. [In Russian].
2. WGMS. Fluctuations of Glaciers Database. 2018. World Glacier Monitoring Service, Zürich, Switzerland. Online access: 04.04.2019. <http://dx.doi.org/10.5904/wgms-fog-2018-11>.
3. Vieli A., Jania J., Kolondra L. The retreat of a tidewater glacier: observations and model calculations on Hansbreen, Spitsbergen. *Journ. of Glaciology*. 2002, 48 (163): 592–600. <https://doi.org/10.3189/172756502781831089>.

4. *Blaszczyk M., Jania J.A., Kolondra L.* Fluctuations of tidewater glaciers in Hornsund Fjord (Southern Svalbard) since the beginning of the 20th century // *Polish Polar Research*. 2003. V. 34. № 4. P. 327–352. doi: 10.2478/popore-2013-0024.
5. *Oerlemans J., Jania J., Kolondra L.* Application of a minimal glacier model to Hansbreen, Svalbard // *The Cryosphere*. 2011. V. 5. № 1. P. 1–11. doi: 10.5194/tc-5-1-2011.
6. *Otero J., Navarro F., Lapazaran J.J., Welty E., Puczek D., Finkelnbrug R.* Modeling the controls on the front position of a tidewater glacier in Svalbard // *Frontiers in Earth Science*. 2017. V. 5. P. 200–214. <https://doi.org/10.3389/feart.2017.00029>.
7. *Reichert B.K., Bengtsson L., Oerlemans J.* Recent glacier retreat exceeds internal variability // *Journ. of Climate*. 2002. V. 15. № 21. P. 3069–3081. [https://doi.org/10.1175/1520-0442\(2002\)015<3069:RGREIV>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0442(2002)015<3069:RGREIV>2.0.CO;2).
8. *Oerlemans J.* Minimal glacier models. Igitur: Utrecht Publishing & Archiving Services. Universiteitsbibliotheek Utrecht, 2008: 91 p.
9. *Cuffey K., Paterson W.S.B.* The physics of glaciers. London: Academic Press, 2010: 704 p.
10. *Демченко П.Ф., Кислов А.В.* Стохастическая динамика природных объектов. Броуновское движение и геофизические примеры. М.: ГЕОС, 2010. 190 с.
11. *Кислов А.В., Демченко П.Ф.* Анализ эволюционных задач географии на основе математического аппарата броуновского движения // *Вестн. МГУ. Сер. 5: География*. 2012. № 2. С. 7–13. http://www.geogr.msu.ru/structure/vestnik/2012_2.php.
12. *Kislov A.V., Morozova P.A.* The Grosser Aletschglatscher dynamics: from a «Minimal model» to a stochastic equation // *Geography. Environment. Sustainability*. 2016. V. 9. № 1. P. 21–27. https://doi.org/10.15356/2071-9388_01v09_2016_02.
13. *Bassis J.* The statistical physics of iceberg calving and the emergence of universal calving laws // *Journ. of Glaciology*. 2011. V. 57. № 201. P. 3–16. doi: 10.3189/002214311795306745.
14. *Hasselmann K.* Stochastic climate models. Part 1. Theory // *Tellus*. 1976. V. 28. № 6. P. 473–485. <https://doi.org/10.1111/j.2153-3490.1976.tb00696.x>.
15. *Рытов С.М.* Введение в статистическую радиофизику. Ч. 1. Случайные процессы. М.: Наука, 1976. 496 с.
16. *Кляцкин В.И.* Стохастические уравнения глазами физика. М.: Физматлит, 2001. 528 с.
17. *Хромов С.П., Петросьянц М.А.* Метеорология и климатология. М.: Изд-во МГУ; М.: Изд-во РАН, 2006. 582 с.
4. *Blaszczyk M., Jania J.A., Kolondra L.* Fluctuations of tidewater glaciers in Hornsund Fjord (Southern Svalbard) since the beginning of the 20th century. *Polish Polar Research*. 2003, 34 (4): 327–352. doi: 10.2478/popore-2013-0024.
5. *Oerlemans J., Jania J., Kolondra L.* Application of a minimal glacier model to Hansbreen, Svalbard. *The Cryosphere*. 2011, 5 (1): 1–11. doi: 10.5194/tc-5-1-2011.
6. *Otero J., Navarro F., Lapazaran J.J., Welty E., Puczek D., Finkelnbrug R.* Modeling the controls on the front position of a tidewater glacier in Svalbard. *Frontiers in Earth Science*. 2017, 5: 200–214. <https://doi.org/10.3389/feart.2017.00029>.
7. *Reichert B.K., Bengtsson L., Oerlemans J.* Recent glacier retreat exceeds internal variability. *Journ. of Climate*. 2002, 15 (21): 3069–3081. [https://doi.org/10.1175/1520-0442\(2002\)015<3069:RGREIV>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0442(2002)015<3069:RGREIV>2.0.CO;2).
8. *Oerlemans J.* Minimal glacier models. Igitur: Utrecht Publishing & Archiving Services. Universiteitsbibliotheek Utrecht, 2008: 91 p.
9. *Cuffey K., Paterson W.S.B.* The physics of glaciers. London: Academic Press, 2010: 704 p.
10. *Demchenko P.F., Kislov A.V.* *Stokhasticheskaya dinamika prirodnykh ob'ektov. Brounovskoe dvizhenie i geofizicheskie primery.* Stochastic dynamics of natural objects. Brownian motion and geophysical examples. Moscow: Publisher GEOS, 2010: 190 p. [In Russian].
11. *Kislov A.V., Demchenko P.F.* Analysis of evolutionary problems of geography on the basis of mathematical apparatus of Brownian motion. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya 5: Geografiya.* Bulletin of the Moscow State University. Series 5: Geography. 2012, 2: 7–13. http://www.geogr.msu.ru/structure/vestnik/2012_2.php. [In Russian].
12. *Kislov A.V., Morozova P.A.* The Grosser Aletschglatscher dynamics: from a «Minimal model» to a stochastic equation. *Geography. Environment. Sustainability*. 2016, 9 (1): 21–27. https://doi.org/10.15356/2071-9388_01v09_2016_02.
13. *Bassis J.* The statistical physics of iceberg calving and the emergence of universal calving laws. *Journ. of Glaciology*. 2011, 57 (201): 3–16. doi: 10.3189/002214311795306745.
14. *Hasselmann K.* Stochastic climate models. Part 1. Theory. *Tellus*. 1976, 28 (6): 473–485. <https://doi.org/10.1111/j.2153-3490.1976.tb00696.x>.
15. *Rytov S.M.* *Vvedenie v statisticheskuyu radiofiziku. Chast 1. Sluchaynye protsessy.* Introduction to statistical radiophysics. Part 1. Random process. Moscow: Publisher Nauka, 1976: 496 p. [In Russian].
16. *Klyatskin V.I.* *Stokhasticheskie uravneniya glazami fizika.* Stochastic equations through the physical point of view. Moscow: Publisher Fizmatlit, 2001: 528 p. [In Russian].
17. *Khromov S.P., Petrosyants M.A.* *Meteorologiya i klimatologiya.* Meteorology and climatology. 7th edition. M.: Publishing house of Moscow University, Publishing House Nauka: 2006: 582 p. [In Russian].