# Снежный покров и снежные лавины

УДК 551.321.7

doi: 10.15356/2076-6734-2019-1-67-80

## Чувствительность результатов моделирования сезонного промерзания к выбору параметризации теплопроводности снежного покрова

© 2019 г. С.П. Поздняков\*, С.О. Гриневский, Е.А. Дедюлина, Е.С. Кореко

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия sppozd@mail.ru

### Sensitivity of the results of modeling of seasonal ground freezing to selection of parameterization of the snow cover thermal conductivity

S.P. Pozdniakov\*, S.O. Grinevskyi, E.A. Dedulina, E.S. Koreko

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

sppozd@mail.ru

Received February 1, 2018 / Revised August 30, 2018 / Accepted October 16, 2018

Kewords: freezing depth, heat transfer in soil profile simulation, snow accumulation and melting, snow density, snow conductivity – density relationship, snow thermal conductivity.

#### Summary

The relationship between the results of calculations of the dynamics of the temperature regime of the in freezing and thawing soil profile with the heating effect of the snow cover is considered. To analyze this connection, two coupled models are used: the model of formation and degradation of snow cover in winter and the model of heat transfer and soil moisture transport in underlying vadoze zone profile. Parametrization of the influence of the snow cover, which at each calculated moment of time has the current average density and depth, on the dynamics of the temperatures of the soil profile is due to the use of its specific thermal resistance, which depends on its current depth and the thermal conductivity coefficient. The coefficient of thermal conductivity of the snow cover is related with its density using six different published empirical relationships. Modeling of heat transfer in freezing and thawing soil is carried out on the example of the field site for monitoring the thermal regime located on the territory of the Zvenigorod Biological Station of Moscow State University. It is shown that the well-known relationships give similar curves for the dynamics of the depth of seasonal freezing, including the degradation of the seasonal freezing layer in the spring period, with the same dynamics of the snow cover. However, the maximum penetration depth of the zero isotherm differs significantly for different snow conductivity-snow density relationships. The tested six relationships were divided into three groups. Minimal freezing is provided by the Sturm model and the effective medium model. The average and rather poorly differentiating freezing from each other is given by the Pavlov, Osokin et al. and Jordan relationships. The greatest value of the freezing depth is obtained with using Pavlov's relationship with a temperature correction.

Citation: Pozdniakov S.P., Grinevskyi S.O., Dedulina E.A., Koreko E.S. Sensitivity of the results of modeling of seasonal ground freezing to selection of parameterization of the snow cover thermal conductivity. *Led i Sneg*. Ice and Snow. 2018. 59 (1): 67–80. [In Russian]. doi: 10.15356/2076-6734-2019-1-67-80.

Поступила 1 февраля 2018 г. / После доработки 30 августа 2018 г. / Принята к печати 16 октября 2018 г.

Ключевые слова: глубина промерзания, коэффициент теплопроводности снега, моделирование теплопереноса в зоне аэрации, накопление снега и снеготаяние, плотность снега, связь теплопроводности и плотности снега.

Рассматривается связь результатов расчёта динамики температурного режима пород зоны аэрации с отепляющим влиянием снежного покрова. Шесть протестированных моделей разделены на три группы. Минимальное промерзание при одинаковых условиях накопления снега дают модели М. Стурма и эффективной среды. Среднее промерзание показывают модели А.В. Павлова, Н.И. Осокина с соавторами и Р. Джордана. Наибольшее значение глубины промерзания даёт модель А.В. Павлова с температурной поправкой.

#### Введение

Оценка влияния глобального изменения климата на водные ресурсы с помощью математического моделирования процессов тепловлагопереноса – одна из наиболее обсуждаемых фундаментальных проблем в области климатологии и водных ресурсов. Обоснование и параметризация физически непротиворечивых моделей разумной детальности для описания и моделирования процессов трансформации осадков в поверхностный и подземный сток в масштабах водосборных бассейнов позволяют анализировать влияние наблюдённых климатических изменений на сток [1], а также использовать сценарии прогнозного изменения климата для оценки потенциального изменения поверхностного и подземного стока. Для территорий с устойчиво существующим в зимний период снежным покровом динамика его накопления, эволюции и таяния во многом определяет весенний поверхностный сток [2] и влагозарядку пород зоны аэрации [1, 3], определяющую существенную часть годового инфильтрационного питания. При этом на формирование стока и впитывания влияет термический режим пород зоны аэрации, определяемый теплообменом атмосферы с подстилающими породами [2, 3]. В холодный период года этот теплообмен существенно зависит от переноса тепла через снежный покров [4] и выражается отепляющим влиянием снега – уменьшением глубины проникновения нулевой изотермы в зону аэрации, покрытую снежным покровом по сравнению с оголённой почвой.

Для широкого круга задач, связанных с формированием и динамикой сезонного промерзания пород зоны аэрации, достаточно удобен приближённый подход [3–6] учёта отепляющего влияния снега, основанный на связи теплового потока в почву B с температурой поверхности снега  $T_s$  и его термическим сопротивлением  $R_{sn}$ . Зависимость для связи потока с термическим сопротивлением получается путём интегрирования уравнения стационарного одномерного кондуктивного теплопереноса через слой эффективной сплошной среды, имеющей мощность H и эффективный коэффициент теплопроводности, в общем случае зависящий от вертикальной координаты:

$$B = -\lambda_{ef} \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{T_s - T_{soil}(0)}{R_{sn}};$$
  

$$R_{sn} = \int_0^H \lambda_{sn}^{-1}(z) dz,$$
(1),

где  $T_{soil}(0)$  — текущая температура поверхности почвы;  $\lambda_{ef}$  — коэффициент теплопроводности почвы;  $\lambda_{sn}$  — коэффициент эффективной теплопроводности снежного покрова.

Отметим, что, согласно структуре зависимости (1), осреднённая в масштабе мощности *H* теплопроводность снега равна  $R_{sp}/H$ , т.е. среднегармоническому значению  $\lambda_{sn}(z)$ . Это свидетельствует о важности вертикальной слоистой структуры снежного покрова и её эволюции [5]. Известно, что эффективная теплопроводность снега как многофазной среды существенно зависит и от объёмного содержания льда в нём, и от его микростроения [4-7], и от процессов переноса тепла водным паром в свободном поровом пространстве снежного покрова [8]. Для упрощённых моделей теплообмена типа (1), описываемых в рамках модели эффективной сплошной среды с кондуктивной теплопроводностью, чаще всего используется связь между эффективной теплопроводностью и плотностью снежного покрова [4, 6, 7, 9–11]. Использование плотности снежного покрова в качестве базовой переменной для расчёта теплопроводности удобно с физических позиций, так как плотность однозначно связана с объёмными долями фаз льда и порового пространства, через каждую из которых идёт тепловой поток. Вместе с тем эта переменная в том или ином виде входит в модели динамики снежного покрова [2, 5], т.е. она (её распределение по глубине) рассчитывается при моделировании накопления на поверхности и трансформации осадков в холодный период года.

К настоящему времени опубликованы десятки эмпирических регрессионных моделей связи теплопроводности снега с его плотностью, основанных на обработке полевых и лабораторных экспериментов. Выбор из их числа расчётной модели этой связи для моделирования процессов тепловлагопереноса, при отсутствии собственных экспериментальных данных, может вызывать определённые затруднения, так как в большинстве из опубликованных работ по моделированию динамики приповерхностных температур с учётом отепляющего влияния снега используется какая-либо одна зависимость, а сравнительного анализа результатов моделирования с другими зависимостями не проводится.

Цель настоящей работы – проанализировать влияние расчётной модели теплопроводности снежного покрова на динамику сезонного промерзания в типовых условиях его формирования и типовом ландшафте и разрезе зоны аэрации, характерных для Подмосковья. Для достижения указанной цели рассматривается моделирование внутригодовой динамики снежного покрова и тепловлагопереноса в зоне аэрации для одной из площадок наблюдений за температурой пород зоны аэрации с использованием шести широко известных эмпирических моделей связи теплопроводность-плотность и одной самосогласованной модели теплопроводности эффективной среды с известной долей включений (объёмного содержания льда).

# Зависимости теплового сопротивления снежного покрова от его плотности

Модели динамики снежного покрова оперируют, как правило, с базовыми текущими переменными — плотностью снега и удельным запасом влаги в нём. Эти переменные связаны с текущей толщиной снежного покрова. Поэтому для сравнительного анализа различных моделей связи теплопроводности и плотности рассмотрим снежный покров, содержащий эквивалентный запас влаги *SWE* с плотностью воды ρ и имеющий постоянную по глубине плотность снега ρ<sub>sn</sub>. Согласно (1), термическое сопротивление такого покрова рассчитывается как

$$R_{sn} = \rho SWE / (\rho_{sn} \lambda_{sn} (\rho_{sn})), \qquad (2)$$

где  $\lambda_{sn}(\rho_{sn})$  — известная зависимость теплопроводности снега от его плотности.

Для анализа связи теплопроводности и плотности используем несколько широко известных зависимостей. Во всех приведённых далее наиболее известных шести зависимостях размерность теплопроводности —  $BT/(M \cdot K)$ , а плотности снега  $\rho_{sn} - \kappa \Gamma/M^3$ :

Р. Джордана [11]:

$$\lambda_{sn} = \lambda_{air} + (7,75 \cdot 10^{-5} \rho_{sn} + 1,105 \cdot 10^{-6} \rho_{sn}^2) (\lambda_{ice} - \lambda_{air}),$$
  
где  $\lambda_{air} = 0.024$  вт/(м·K) – теплопроводность возду

ха;  $\lambda_{ice} = 2,25$  вт/(м·К) – теплопроводность льда;

А.В. Павлова [4]:

$$\lambda_{sn} = 3,49 \cdot 10^{-2} + 3,52 \cdot 10^{-4} \rho_{sn} - 2,06 \cdot 10^{-7} \rho_{sn}^2 + 2,62 \cdot 10^{-9} \rho_{sn}^3;$$

зависимость А.В. Павлова [4] с температурной коррекцией, учитывающей конвективную составляющую переноса тепла водяным паром в снежном покрове  $\lambda_{sn}(T_{sn}) = \lambda_{sn}[1 + 1,18\exp(0,15T_{sn})]$ , где  $\lambda_{sn}$  – теплопроводность, рассчитанная по зависимости А.В. Павлова без поправки;

М. Стурма [9]:

$$\lambda_{sn} = \begin{cases} 2, 3 \cdot 10^{-2} + 2, 34 \cdot 10^{-4} \rho_{sn}, \rho_{sn} \le 156\\ 0, 138 - 1.01 \cdot 10^{-3} \rho_{sn} + 3, 233 \cdot 10^{-6} \rho_{sn}^2; \rho_{sn} > 156; \end{cases}$$

Н.И. Осокина с соавторами [6]:

 $\lambda_{sn} = 9,165 \cdot 10^{-2} - 3,814 \cdot 10^{-4} \rho_{sn} + 2,905 \cdot 10^{-6} \rho_{sn}^2$ 

Последняя зависимость — это самосогласованный эффективный коэффициент теплопроводности бинарной среды [12], состоящей из ледяной матрицы, содержащей шаровые включения — поры, заполненные воздухом с объёмной долей  $n = 1 - \rho_{sn}/\rho_{ice}$ . Такая схематизация кондуктивного переноса в рамках модели самосогласованной эффективной среды приводит к следующему выражению для коэффициента эффективной теплопроводности:

$$\lambda_{sn} = \frac{\lambda_{air}}{4} \left\{ (3n-1) + \frac{\lambda_{ice}}{\lambda_{air}} (2-3n) + \sqrt{\left[ (3n-1) + \frac{\lambda_{ice}}{\lambda_{air}} (2-3n) \right]^2 + 8 \frac{\lambda_{ice}}{\lambda_{air}}} \right\}.$$

На рис. 1 показана зависимость термического сопротивления расчётного слоя снежного покрова с водным эквивалентом 1 м от его плотности, вычисленная по зависимости (2) для каждой из приведённых здесь моделей. Кроме того, на рис. 1 приведено термическое сопротивление, также рассчитанное по зависимости (2) при SWE = 1 м по экспериментальным данным о связи теплопроводности и плотности снежного покрова в Гренландии [10] и Подмосковье [6]. Как следует из рис. 1, несмотря на то, что в целом все рассматриваемые зависимости отражают тенденцию роста термического сопротивления, с уменьшением плотности снега ни одна из них не описывает все приведённые экспериментальные данные существенно лучше, чем другие.



**Рис. 1.** Связь расчётного термического сопротивления с плотностью снега. Эмпирические зависимости: *1* – Р. Джордана; *2* – А.В. Павлова; *3* – А.В. Павлова с температурной поправкой; *4* – М. Стурма; *5* – эффективной среды; *6* – Н.И. Осокина и др.; экспериментальные данные: 7 – М. Стурма и др. [10], Н.И. Осокина и др. [6]; *8* – мелко-, средне- и крупнозернистый снег; *9* – глубинная изморозь мелкокристаллическая; *10* – глубинная изморозь крупнокристаллическая; *11* – свежевыпавший снег

Fig. 1. Relationship between the calculated thermal resistance and the snow density.

Empirical dependencies: 1 - R. Jordan; 2 - A.V. Pavlov; 3 - A.V. Pavlov with temperature correction; 4 - M. Sturm; 5 - effective medium; 6 - N.I. Osokin et al.; the experimental data of: 7 - M. Sturm et al. [10], N.I. Osokin et al. [6]; 8 - fine-, medium-, coarsegrained snow; 9 - deep frost small-crystalline; 10 - deep frost large-grained; 11 - freshly fallen snow

#### Модели динамики снежного покрова и тепловлагопереноса в породах зоны аэрации

Для моделирования динамики сезонного промерзания с учётом отепляющего влияния снежного покрова использовалась модель Surfbal [1], состоящая из трёх связанных субмоделей: а) субмодели трансформации осадков на сток и впитывание; б) субмодели расчёта потенциальной эвапотранспирации; в) субмодели тепловлагопереноса в зоне аэрации. Модель Surfbal разработана для моделирования формирования инфильтрационного питания подземных вод как результата трансформации осадков на поверхности, их впитывания, расходования на эвапотранспирацию и сопряжена с моделями влагопереноса и геофильтрации [1]. Этот комплекс моделей ориентирован на моделирование процессов формирования питания и подземного стока в масштабах бассейнов малых рек в условиях их ландшафтной неоднородности и литологической неоднородности зоны аэрации. В модели Surfbal в качестве входной метеорологической информации используются ряды суточных объёмов осадков, минимальных и максимальных температур, измеренной или восстановленной по минимальной и максимальной температуре солнечной радиации, скоростей ветра и влажностей воздуха.

С учётом целевых масштабов в субмодели трансформации осадков для расчёта накопления, консолидации и таяния снежного покрова используется модель А.Н. Гельфана и Ю.Г. Мотовилова, хорошо зарекомендовавшая себя при моделировании линамики снежного покрова в масштабе водосбора на водосборах центральной части Европейской территории России [2, 13] и настроенная на использование таких же входных метеоданных. как и Surfbal. Для оценки динамики накопления и деградации снежного покрова на поверхности земли в точке эта модель рассматривает динамику глубины снега Н, имеющего текущую плотность ρ<sub>sn</sub>, содержащего объёмную долю незамёрзшей воды w с плотностью  $\rho_w$  и объёмную долю льда I с плотностью р<sub>i</sub> [2]. Согласно данной модели, к основным факторам, формирующим глубину снега и его плотность, относятся: накопление за счёт осадков, расходование за счёт таяния и испарения и самоуплотнение за счёт увеличения текущей средней плотности р<sub>м</sub> по сравнению с плотностью свежевыпавшего снега р<sub>s0</sub>. Модель рассматривает динамику накопления и расходования снега в точке и имеет следующий вид:

$$\frac{dH}{dt} = \left[ R_s \chi_0 - (L + E_S) \chi I^{-1} \right] - V;$$
  
$$\frac{d}{dt} (IH) = \chi (R_s - L - E_S + S_i);$$
  
$$\frac{d}{dt} (wH) = (R_l + L - v_s - E_L - S_i),$$
где:

а)  $\chi_0 = \rho_w / \rho_{s0}$ ;  $\chi = \rho_w / \rho_i$ ;  $R_i$ ,  $R_s$  – суточный объём жидких и твёрдых осадков при известной общей интенсивности выпадения осадков O, причём:

$$\begin{cases} R_s = O; R_l = 0; \ T \le 0 \\ R_l = O; R_s = 0; \ T > 0, \end{cases}$$

T – среднесуточная температура приземного воздуха; данное соотношение приближённо диагностирует фазы осадков; как показано в работе [5], температура фазового перехода может в разных условиях изменяться от 0 до 2,5 °С; б)  $S_i$  — интенсивность замерзания незамёрзшей воды при опускании среднесуточной температуры ниже 0 °C [2]:  $S_i = K_i |T|^{0.5}$ ,  $K_i$  — коэффициент фазовых переходов вода—лёд;

в)  $E_S + E_L = E$  – интенсивность испарения из снежного покрова, принимаемая равной испаряемости;

г) *V* – скорость самоуплотнения снега, зависящая от его глубины, средней плотности и температуры [2]:  $V = 0.5 K_v \rho_{sn} H^2 \exp(\beta_1 T - \beta_2 \rho_{sn})$ ;  $K_v$ ,  $\beta_1$  и  $\beta_2$  – эмпирические параметры уплотнения;

д) *L* – интенсивность снеготаяния, зависящая от текущей плотности снега [2] и равная

$$L = \begin{cases} 0; T < 0 \\ K_s \rho_{sn} T; T \ge 0, \end{cases}$$

 $K_{\rm s}$  – коэффициент стаивания;

е)  $v_s$  — водоотдача из снега, определяемая как гравитационная ненасыщенная фильтрация растаявшей влаги через всю мощность снежного покрова вниз:

$$v_s = \begin{cases} K_f \overline{w}^{\varepsilon}; \overline{w} = \frac{w - w_{\max}}{1 - I - w_{\max}}; w \ge w_{\max} \\ 0; w < w_{\max}, \end{cases}$$

 $K_f$  — коэффициент фильтрации снега;  $w_{max}$  — максимальное водоудержание растаявшей влаги в снегу;  $\varepsilon$  — показатель степени в степенной зависимости С.Ф. Аверьянова—Брукса—Корея коэффициента влагопереноса от насыщенности пор жидкой фазой.

Плотность свежевыпавшего снега задаётся функцией температуры воздуха:

$$\rho_{s0} = \begin{cases} \rho_{\min}; T < T_{\min}; \\ \rho_{\min} + (\rho_{\max} - \rho_{\min}) \frac{T - T_{\min}}{|T_{\min}|}; \\ T_{\min} \leq T < 0; \\ \rho_{\max}; T \geq 0, \end{cases}$$

где  $\rho_{\min} = 20 \text{ кг/м}^3$ ;  $\rho_{\max} = 160 \text{ кг/м}^3$ ;  $T_{\min} = -30 \text{ °C}$ .

Расчёты суточной динамики баланса влаги в снежном покрове при помощи описанной здесь модели при известных температурах воздуха, суточных суммах осадков и испарении снега позволяют оценить глубину снежного покрова, объёмную долю льда и жидкой влаги в нём, а по ним определить среднесуточную текущую плотность снега как

$$\rho_{sn} = (\rho_i I + \rho_w w)/H.$$

Получаемые при помощи описанной модели динамики снежного покрова текущие глубины снега и его плотность далее используются в субмодели теплопереноса для моделирования динамики температур в зоне аэрации. Для этого в текущей версии программы Surfbal применяется модель промерзания—оттаивания пород зоны аэрации, имеющей переменное по глубине и во времени насыщение подвижной влагой, содержание которой связано с основной гидрофизической характеристикой пород и температурой [14]. Полное массовое влагосодержание  $\rho_w \theta$ в единичном объёме породы состоит из содержания незамёрзшей влаги и льда:

$$\rho_{w}\theta(h,T,z) = \rho_{w}\theta_{w}(h) + \rho_{i}\theta_{I}(T) \leq \rho_{w}\theta_{\max}, \qquad (3)$$

где  $\theta_w$  — объёмное влагосодержание незамёрзшей воды;  $\theta_i$  — объёмное содержание льда;  $\theta_{max}$  — максимальное объёмное влагосодержание, равное пористости породы;  $h = -\psi$  — отрицательная высота давления в почвенной влаге;  $\psi$  — высота всасывания; T = T(z) — температура пород зоны аэрации.

При положительной температуре связь между высотой давления влаги и общим объёмным влагосодержанием  $\theta$  определяется основной гидрофизической характеристикой породы, которая аппроксимируется уравнением Ван Генухтена:

$$h(\theta) = -\alpha^{-1} (S^m - 1)^{1/n};$$
  

$$S(h) = (\theta_w - \theta_{\min}) / (\theta_{\max} - \theta_{\min}),$$
(4)

где S(h) — насыщенность свободного пространства пор подвижной влагой;  $\alpha$ , n, m — эмпирические параметры;  $\theta_{\min}$  — доля неподвижной влаги (связанной воды), которая не передвигается под действием градиентов сил тяжести и всасывающего давления.

Для насыщенности пор подвижной влагой при данной высоте давления и при отрицательных температурах используется связь между высотой давления и температурой, получаемая на основе интегрирования уравнения Клайперона [14]:

$$h_{T}(\Theta_{w},T) = \begin{cases} h(\Theta); T > T^{*}; \\ h(\Theta) + a_{T}(T - T^{*}); T \leq T^{*}; \\ T^{*} = -a_{T}^{-1}h(\Theta); a_{T} = \frac{gT_{0}^{a}}{L_{i}}, \end{cases}$$
(5)

где  $T^*$  — температура начала замерзания при данной влажности;  $L_i$  — удельная теплота плавления льда  $T_0^a = 273, 16$ .

Выражение для насыщенности пор подвижной влагой в уравнении Ван Генухтена (4) при наличии льда определяется как

$$S[h(\theta_w, T)] = (\theta_w - \theta_{\min}) / (\theta_{\max} - (\theta_I + \theta_{\min})).$$
(6)

Система уравнений (3)–(6) представляет собой уравнение состояния воды, позволяющее определить долю замёрзшей и незамёрзшей воды во всём диапазоне температур и влажности породы при известных параметрах основной гидрофизической характеристики. Для расчёта динамики температур пород в программе Surfbal совместно с уравнением состояния используется одномерное вертикальное уравнение теплопереноса с учётом фазовых переходов, непрерывных во всем интервале отрицательных температур:

$$C_{s} \frac{\partial T}{\partial t} - L_{i} \rho_{i} \frac{\partial \theta_{i}}{\partial t} = \frac{\partial q_{T}}{\partial z};$$

$$q_{T} = -\lambda_{ef} (T, \theta) \frac{\partial T}{\partial z} + C_{w} T v_{z};$$

$$C_{s} = (1 - \theta_{\max}) C_{r} + \theta_{w} C_{w} + \theta_{i} C_{i} + (\theta_{\max} - \theta_{w} - \theta_{i}) C_{air},$$
(7)

где *C* с соответствующими нижними индексами – объёмные теплоёмкости: *s* – породы, *r* – её твёрдой фазы, *w* – воды, *i* – льда, *air* – воздуха;  $\lambda_{ef}$  – эффективная теплопроводность породы, учитывающая её текущее влагосодержание и фазовый состав воды; *v<sub>z</sub>* – вертикальная скорость влагопереноса.

В уравнении (7) коэффициент теплопроводности породы зависит от теплопроводности скелета, содержания и фазового состава воды. Для параметризации этой зависимости в программе Surfbal применён алгоритм Дж. Коте и Дж.М. Конрада [15] расчёта коэффициента теплопроводности при данном насыщении пор влагой с нелинейной интерполяцией между значениями теплопроводности в полностью водонасыщенном  $\lambda_{sat}$  и в сухом  $\lambda_{dry}$  состояниях:

$$\overline{\lambda}(S) = \frac{\lambda(S) - \lambda_{dry}}{\lambda_{sat} - \lambda_{dry}} = \frac{\varkappa S}{1 + (\varkappa - 1)S},$$

где *к* — эмпирический параметр, зависящий от литологического состава пород и состояния породы (мёрзлое, талое).

Для расчёта коэффициента теплопроводности в полностью водонасыщенном состоянии используется следующая зависимость [15]:

$$\lambda_{sat}(T) = \lambda_s^{1-\theta_{\max}} \lambda_w^{\theta_w} \lambda_I^{\theta_j};$$
$$\lambda_s = \prod_j \lambda_{m_j}^{x_j}; \sum_j x_j = 1,$$

где  $\lambda_w$  — коэффициент теплопроводности воды равный 0,552 Вт/(м·К);  $\lambda_I$  — коэффициент теплопроводности льда равный 2,18 Вт/(м·К);  $\lambda_s$  — коэффициент теплопроводности твёрдой фазы породы, зависящий от коэффициентов теплопроводности каждого из минералов  $\lambda_m$ , слагающих её, и объёмной доли в скелете *j*-го минерала  $x_j$ .

Для оценки теплопроводности абсолютно сухой породы применяется степенная зависимость  $\lambda_{drv}$  от пористости [15]:

$$\lambda_{drv} = \chi \cdot 10^{-\eta \theta_{max}},$$

где характерные значения параметров  $\chi = 0.75$  BT/(м·K), а  $\eta = 1.2$ .

Для моделирования распространения температурных волн с поверхности в зону аэрации необходимо знать температуру подстилающей поверхности — почвы, покрытой растительным покровом в летний период, и поверхности снега в зимний период, чтобы использовать граничное условие типа (1). В то же время в качестве входной информации используются доступные данные о температуре приземного воздуха на метеорологической высоте измерений. Для перехода от температур воздуха к температуре подстилающей поверхности в текущей версии программы Surfbal применяется уравнение радиационно-теплового баланса подстилающей поверхности, записанное в виде [4, 16]

$$R_{Sh}(1 - \alpha_s) + R_L - L_v E_s - H_s - B = 0,$$

где  $R_{Sh}$  — интенсивность падающей коротковолновой радиации;  $\alpha_s$  — альбедо поверхности снега;  $R_L$  — баланс длинноволновой радиации;  $E_s$  — испарение с поверхности;  $L_v$  — удельная теплота парообразования;  $H_s$  — турбулентный поток явного тепла.

Баланс длинноволновой радиации определяется разницей абсолютных температур воздуха и подстилающей поверхности:

$$R_L = \sigma(\varepsilon_a T^{a4} - \varepsilon_s T_s^{a4}),$$

где  $\sigma$  — постоянная Стефана—Больцмана;  $\varepsilon_a$ ,  $\varepsilon_s$  — коэффициенты эмиссии атмосферы и поверхности соответственно, причём для поверхности снега и увлажнённой почвы величина  $\varepsilon_s$  практи-

чески может быть принята равной единице; T – температура воздуха;  $T_s$  – температура подстилающей поверхности, верхний индекс *a* означает абсолютную температуру:  $T^a = T + T_0^a$ .

Как известно [4], турбулентный поток тепла определяется разностью температур подстилающей поверхности и воздуха:

$$H_s = C_{air}(T_s - T)/r_a,$$

где  $r_a$  — аэродинамическое сопротивление, рассчитываемое обычно в с/м, зависящее от скорости ветра и двух референтных высот: высоты растительности и метеорологической высоты, т.е. высоты измерения температуры воздуха [16];  $C_{air}$  — объёмная теплоёмкость воздуха, которая слабо меняется в зависимости от объёмного веса воздуха и составляетя около 1300 Дж/(м<sup>3</sup>·K).

Переписав уравнение баланса длинноволновой радиации в виде

$$\begin{aligned} R_L &= \sigma \Big( \varepsilon_a T^{a4} - \varepsilon_s T_s^{a4} \Big) \approx R_L^0 - 4\sigma \varepsilon_s T^{a3} (T_s - T), \\ R_L^0 &= \sigma T^{a4} \Big( \varepsilon_a - \varepsilon_s \Big), \end{aligned}$$

уравнение радиационно-теплового баланса можно записать, как

$$R_{b} - \lambda_{air} \left(T_{s} - T\right) - r_{surf}^{-1} \left(T_{s} - T_{soil}\right) = 0;$$
  
$$\lambda_{air} = \frac{C_{air}}{r_{a}} + 4\sigma\varepsilon_{s}T^{a3}; R_{b} = R_{Sh}(1 - \alpha_{s}) + R^{0}_{L} - L_{v}E_{s},$$
<sup>(8)</sup>

где  $\lambda_{air}$  — эффективный коэффициент теплообмена в приземном воздухе от подстилающей поверхности до метеорологической высоты;  $r_{surf}$  тепловое сопротивление снежного покрова в зимний период, определённое в зависимости (1), и тепловое сопротивление лесной (полевой) подстилки, если она существует, в летний период.

Использование уравнений (8) и (1) позволяет сформировать в качестве граничного условия на поверхности земли для уравнения теплопереноса в зоне аэрации условие III рода в виде

$$\frac{\lambda_{air}}{\lambda_{air}r_{surf}+1} \left(T - T_{soil}(0)\right) + \frac{R_b}{\lambda_{air}r_{surf}+1} = -\lambda_{ef} \left.\frac{\partial T_{soil}}{\partial z}\right|_{z=0.}$$
(9)

Уравнение (9) применяется в качестве граничного условия на поверхности в тёплый и холодный периоды года при отсутствии снеготаяния. В период снеготаяния предполагается, что температура на подстилающей поверхности, т.е. на поверхности снега, известна и равна нулю, а весь радиационный баланс тратится на снеготаяние. Поэтому в этот период в качестве граничного условия используется уравнение (1) с  $T_s = 0$ .

В граничном условии (9) величина  $R_b$  представляет собой баланс радиационных членов и количества теплоты, расходуемой на испарение. Для прямой оценки этой величины требуется комплекс данных радиационных наблюдений и прямая оценка динамики испарения, получить которую достаточно сложно. Поэтому в программе Surfbal используется приближённая параметризация величины  $R_b$ . Эта параметризация исходит из того, что, согласно уравнению (8), при отсутствии теплопотерь в почву характерный перепад температур воздуха и подстилающей поверхности  $\Delta T$  выражается следующим образом:

$$\Delta T = T_s - T \approx R_b / \lambda_{air}.$$
 (10)

Как правило, усреднённая динамика  $\Delta T(t)$  имеет сезонный ход: летом эта величина в среднем положительна за счёт радиационной добавки, а зимой отрицательна из-за радиационного остывания поверхности [4]. Поэтому в программе Surfbal в качестве входной информации вводятся гармонические колебания  $\Delta T(t)$  с годовым периодом и амплитудой  $\Delta T_{max}$ , позволяющие в любой момент времени рассчитать по зависимости (10)  $R_b(t)$ , а затем использовать её в граничном условии (9). Величина этой амплитуды должна калиброваться по данным наблюдений за теплопереносом.

Для решения уравнения теплопереноса необходимо одновременно решать сопряжённое и связанное с ним уравнение влагопереноса в зоне аэрации. В текущей версии программы Surfbal используется упрощённый подход к моделированию влагопереноса, заключающийся в том, что изменение содержания подвижной влаги в зоне аэрации происходит вследствие отбора её корнями растений в вегетационный период, фазовых переходов в период отрицательных температур, вертикального влагопереноса влаги, впитывающейся с поверхности за счёт гравитационного стекания.

#### Результаты моделирования

Моделирование проводилось на примере полевой площадки наблюдений за тепловлагопереносом в зоне аэрации, оборудованной на территории Звенигородской биостанции МГУ имени М.В. Ло-

Х	аракте	ристики	моделир	уемого	разреза
---	--------	---------	---------	--------	---------

1	
Значение	
0,46	
0,04	
1	
1,85	
1,83	
	0,2
0,8	
1,9	
	0.85
0,85	

моносова [17]. На этой площадке с 2009 г. ведётся мониторинг температур пород зоны аэрации автоматическими термодатчиками, установленными на глубинах 0,25, 0,5, 0,8 и 1,5 м от земной поверхности. Поверхность площадки представляет собой естественную луговую растительность на первой надпойменной террасе р. Москва. В литологическом отношении породы зоны аэрации представлены суглинистыми отложениями.

Гидрофизические характеристики пород изучены в лаборатории с использованием образцов ненарушенного строения (таблица). Теплопроводность исследовалась при помощи экспериментальных определений в шурфе измерителем теплопроводности «МИТ-1». Разовые результаты измерения теплопроводности в летний период с одновременным измерением объёмной влажности при помощи измерителя влажности пород «10HS Soil Moisture Smart Sensor» показали, что теплопроводность пород в летний период на глубинах 0,25-1,5 м при достаточно высокой объёмной влажности (около 0,35) в среднем составляет около 1,56 Вт/(м·К). В зимний период было выполнено только одно измерение теплопроводности на глубине 0,05 м, показавшее, что при температуре -0,45 °C теплопроводность пород зоны аэрации составляет 1,95 Вт/(м·К). В районе данной площадки установлена метеостанция с автоматической регистрацией температур воздуха, скорости ветра, относительной влажности воздуха и суточных объёмов осадков в тёплый период года.

На первом этапе моделирования проводилась калибрация субмоделей динамики снега и теплопереноса в зоне аэрации. Цель этого этапа — воспроизведение наблюдённых параметров снежного покрова и температурного режима зоны аэрации. Для этого в программе Surfbal моделировался термический режим пород полевой плошалки в период с 2009 по 2015 г. Для калибрации был сформирован входной файл метеоданных суточного разрешения с 1990 по 2015 г. Периоды, по которым фактические данные со Звенигородской метеостанции отсутствуют, заполнялись на основании анализа корреляции наблюдённых метеоданных соседних метеостанций (г. Можайск и г. Москва) с данными Звенигородской метеостанции. Для калибрации субмодели, описывающей динамику снежного покрова, использовались данные эпизодических измерений глубины снега и SWE, проводимые непосредственно на площадке, и данные регулярных наблюдений на метеостанции г. Можайск – станции, имеющей наилучшую наблюдённую корреляцию осадков и температур с метеостанцией на площадке.

На рис. 2 показано сравнение наблюдённых глубин снега и SWE с модельными, полученными при следующих параметрах модели динамики снежного покрова: *К*<sub>s</sub> – коэффициент стаивания, равен 1,75 см<sup>4</sup>/(грамм градус);  $K_i$  – коэффициент фазовых переходов вода-лёд -4,5 мм/К<sup>1/2</sup>; эмпирическое параметры уплотнения снега –  $K_{\nu} = 0,2$  градус/см<sup>4</sup>/сут.;  $\beta_1 = 0,$  $\beta_2 = 16 \text{ см}^3/\text{грамм}$ . Экспериментальные данные по SWE получены в двух точках первой террасы, на которой расположена площадка. Средние значения в них за период наблюдений составляют 55 и 60 мм. Рассчитанное модельное значение за этот же период равно 55 мм. Таким образом, достаточно удовлетворительное совпадение модельных и наблюдённых глубин снега и SWE показывает, что средняя плотность снега на данной площадке моделируется достаточно корректно.

При расчётах термического сопротивления снега по данным о его средней плотности в текущей версии модели предусмотрены две гипотезы о распределении плотности в разрезе. Согласно первой гипотезе, плотность постоянна по глубине, согласно второй — плотность меняется линейно с глубиной от плотности на поверхности снега до максимальной таким образом, что её среднее интегральное значение равно средней плотности, рассчитанной субмоделью динамики снега. В свою очередь плотность снега на поверхности равна плотности свежевыпавшего снега.

Результаты калибрации субмодели теплопереноса в зоне аэрации представлены на рис. 3. Моделирование проводилось с использованием характеристик, определённых независимо в лабораторных условиях, и эмпирического параметра Коте-Конрада к, взятого как рекомендованного для суглинков в работе [5] и представленного в таблице. Наилучшее совпадение модельных и наблюдённых кривых получено при величине радиационной поправки температуры  $\Delta T_{\text{max}} = 0.5$  °С и отсутствии термического сопротивления подстилки в бесснежный период. При моделировании, представленном на рис. 3, для расчёта теплопроводности снега использовали модели М. Стурма и Н.И. Осокина с соавторами. Как видно из рис. 3, модель М. Стурма несколько лучше, чем модель Н.И. Осокина. Она описывает зимние минимумы температур на глубине 0,25 м, лежащей прямо под зоной интенсивных фазовых переходов. Однако точность наших исследований не позволяет сделать вывод, что зависимость М. Стурма лучше подходит для исследуемых условий Подмосковья, чем зависимость Н.И. Осокина, так как распределение плотностей снега по глубине не исследовалось, а задавалось гипотетически на основе средней по глубине плотности, получаемой при моделировании, и предположения о её линейном распределении по глубине. Для анализа чувствительности важно, что использование разных аппроксимаций плотность-теплопроводность приводит, при прочих равных условиях, к различиям в расчётных температурных кривых в зимний период.

Таким образом, согласно результатам, представленным на рис. 2 и 3, применённые модели достаточно хорошо описывают динамику снежного покрова и температуры в зоне аэрации, что позволяет перейти к анализу чувствительности глубины промерзания к уравнению связи плотность-теплопроводность. Для анализа влияния расчётной модели теплопроводности снежного покрова на расчёт сезонного промерзания проведена серия из шести модельных расчётов динамики температур пород зоны аэрации с использованием во всех расчётах одинаковых параметров, полученных при калибрации, и входных метеоданных, за исключением уравнения связи теплопроводность снега – плотность. В каждом из расчётов применялась своя, одна из описанных ранее эмпирических моделей этой связи. Чтобы получить представительную, осреднённую по



Рис. 2. Измеренные и модельные параметры снежного покрова:

*a* – толщина снега; *б* – *SWE*; *1* – наблюдённая толщина на площадке; *2* – модельная толщина; *3* – наблюдённая толщина на метеостанции г. Можайск; *4* – наблюдённый *SWE* на площадке; *5* – модельный *SWE* 

Fig. 2. Measured and model parameters of the snow cover:

*a* – depth of snow;  $\delta - SWE$ ; *1* – observed depth at the site; *2* – simulated depth; *3* – observed depth at the weather station in Mozhaisk; *4* – observed *SWE* on the site; *5* – simulated SWE

многолетнему периоду внутригодовую динамику глубины промерзания, входной ряд метеоусловий был продлён до 1945 г. по метеостанции-аналогу.

Результаты этого моделирования представлены на рис. 4, из которого видно, что максимальная глубина модельного промерзания доста-



**Рис. 3.** Результаты мониторинга и моделирования динамики температур на исследуемой площадке: *1* – мониторинг на глубине 0,25 м; *2* – мониторинг на глубине 1,5 м; *3* – моделирование на глубине 0,25 м с использованием зависимости М. Стурма; *4* – моделирование на глубине 1,5 м с использованием зависимости М. Стурма; *5* – моделирование на глубине 0,25 м с использованием зависимости Н.И. Осокина и др.; *6* – моделирование на глубине 1,5 м с использованием зависимости Н.И. Осокина и др.

Fig. 3. Results of monitoring and simulation of temperature dynamics at the investigated site.

1 -monitoring at a depth of 0.25 m; 2 -monitoring at a depth of 1.5 m; 3 -simulation at a depth of 0.25 m using M. Sturm's dependence; 4 -simulation at a depth of 1.5 m using M. Sturm's dependence; 5 -simulation at a depth of 0.25 m using N.I. Osokin's and et al. dependence; 6 -simulation at a depth of 1.5 m using N.I. Osokin's and et al. dependence

точно чувствительна к выбору расчётной связи теплопроводность снега — плотность. Так, модель А.В. Павлова с температурной поправкой по сравнению с моделями М. Стурма и эффективной среды даёт в три раза больше глубину сезонного промерзания. В то же время ожидаемо получено, что и начало промерзания, и его конец в среднем одинаков для всех используемых зависимостей, так как именно в начале и конце периода холодных температур отепляющее влияние снега несущественно из-за его небольшой толщины. Поскольку в расчётах использовались реальные данные метеонаблюдений, по ним можно проиллюстрировать, как влияет наблюдаемая в Подмосковье динамика увеличения зимних температур [1] на сезонное промерзание. Так, осреднённая за период 1945—2012 гг. максимальная глубина промерзания при использовании модели М. Стурма составила 0,32 м, а эта же глубина, осреднённая за период 1990—2015 гг. уменьшилась почти вдвое и составила всего 0,17 м. Этот результат хорошо корреспондируется с данными фактического и модельного анализа глубины промерзания в Волжском бассейне [18].



**Рис. 4.** Осреднённая за 1945—2012 гг. внутригодовая модельная динамика глубины сезонного промерзания на площадке при разных зависимостях плотность снега — теплопроводность:

*1* – Р. Джордана; *2* – А.Н. Павлова; *3* – А.Н. Павлова с температурной поправкой; *4* – М. Стурма; *5* – эффективной среды; *6* – Н.И. Осокина и др.; *7* – осреднённая за расчётный период модельная толщина снега

**Fig. 4.** Averaged over 1945–2012 the annual model dynamics of the depth of seasonal freezing on the site with different dependences of snow density-heat conduction:

1 - R. Jordan; 2 - A.V. Pavlov; 3 - A.V. Pavlov with temperature correction; 4 - M. Sturm; 5 - effective medium; 6 - N.I. Osokin and et al.; 7 - simulated depth of snow cover averaged over the simulation period

#### Выводы

Накопленные к настоящему времени экспериментальные данные связи плотности и теплопроводности снега не позволяют априори выбрать единственную модель корреляционной связи между этими параметрами из числа приведённых здесь. Выбор модели связи теплопроводность — плотность снежного покрова существенно влияет на максимальную глубину сезонного промерзания, получаемую при моделировании динамики снежного покрова и промерзания зоны аэрации под ним. Протестированные шесть моделей этой связи для характерных для Подмосковья условий формирования динамики толщины и средней плотности снежного покрова разделились на три группы: 1) минимальное промерзание дают модель М. Стурма и модель эффективной среды; 2) среднюю и достаточно слабо различающуюся между собой глубину промерзания дают модели А.В. Павлова, Н.И. Осокина с соавторами и Р. Джордана; 3) самое высокое значение глубины промерзания даёт модель А.В. Павлова с температурной поправкой.

Эпигнозное моделирование температурного режима пород зоны аэрации для исследуемой площадки подтверждают результаты предыдущих исследований в Волжском бассейне, согласно которым уменьшилась глубина сезонного промерзания и её чувствительность к наблюдаемому росту температур в зимний период. Так, сравнение максимальной модельной глуби-

#### Литература

- Гриневский С.О., Поздняков С.П. Ретроспективный анализ влияния климатических изменений на формирование ресурсов подземных вод // Вест. МГУ. Серия 4: Геология. 2017. № 2. С. 42–50. doi: 10.3103/S0145875217030036.
- Гельфан А.Н. Динамико-стохастическое моделирование формирования талого стока. М.: Наука, 2007. 279 с.
- 3. *Гусев Е.М., Насонова О.Н.* Моделирование тепло и влагообмена поверхности суши с атмосферой. М.: Наука, 2010. 323 с.
- 4. Павлов А.В. Теплофизика ландшафтов. Новосибирск: Наука, 1979. 286 с.
- 5. Шмакин А.Б, Турков Д.В., Михайлов Ю.А. Модель снежного покрова с учетом слоистой структуры и ее сезонной эволюции // Криосфера Земли. 2009. Т. XIII. № 4. С. 69–79.
- 6. Осокин Н.И., Сосновский А.В., Чернов Р.А. Влияние стратиграфии снежного покрова на его термическое сопротивление // Лёд и Снег. 2013. Т. 53. № 3. С. 63–70.
- 7. Осокин Н.И., Сосновский А.В., Чернов Р.А. Коэффициент теплопроводности снега его изменчивость // Криосфера Земли. 2017. № 3. С. 60–68.
- Sokratov S.A., Sato A., Kamata Y. Water vapor in the pore space of snow // Annals of Glaciology. 2001. V. 32. P. 51–58.
- 9. Sturm M., Holmgren J., Konig M., Morris K. The thermal conductivity of seasonal snow // Journ. of Glaciol-ogy.1997. V. 43. № 143. P. 26–41.
- Sturm M.D. Perovich K., Holmgren J. Thermal conductivity and heat transfer through the snow on the ice of the Beaufort Sea // Journ. of Geophys. Research. 2002. V. 107 (C10). C. 1–17. 8043. doi: 10.1029/2000JC000409.
- Jordan R. A one-dimensional temperature model for a snow cover technical documentation for SN-THERM.89. U.S. Army Corps of Engineers. Cold Regions Research & Engineering Laboratory. Special Report 91–16. 1991. 49 p.

ны промерзания, полученной нами в результате моделирования, и осреднённой за 70-летний период с 1945 г. и за последние 25 лет показало, что эта глубина уменьшается почти вдвое.

**Благодарности.** Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 16-17-10187).

Acknowledgments. The work was supported by the Russian Foundation for Fundamental Studies (grant  $N^{\circ}$  16-17-10187).

#### References

- Grinevskiy S.O., Pozdnyakov S.P. A retrospective analysis of the impact of climate change on groundwater resources. *Vestnik Moskovskogo Universiteta*. Herald of the Moscow State University. Geology Series. 2017, 2: 42–50. doi: 10.3103/S0145875217030036. [In Russian].
- Gelfan A.N. Dinamiko-stokhasticheskoe modelirovanie formirovaniya talogo stoka. Dynamic stochastic modeling of the formation of melt flow. Moscow: Nauka, 2007: 279 p. [In Russian].
- Gusev E.M., Nasonova O.N. Modelirovanie teplo i vlagoobmena poverkhnosti sushi s atmosferoy. Modeling of heat and moisture exchange of the land surface with the atmosphere. Moscow: Nauka, 2010: 323 p. [In Russian].
- Pavlov A.V. Teplofizika landshaftov. Thermophysics of landscapes. Novosibirsk: Nauka, 1979: 286 p. [In Russian].
- Shmakin A.B., Turkov D.V., Mikhailov A.Yu. Model' snezhnogo pokrova s uchetom sloistoy struktury i yeye sezonnoy evolyutsii. Model of snow cover with inclusion of layered structure and its seasonal evolution. *Kriosfera Zemli*. Cryosphere of the Earth. 2009, XIII (4): 69–79. [In Russian].
- Osokin N.I., Sosnovskiy A.V., Chernov R.A. The influence of the stratigraphy of the snow cover on its thermal resistance. *Led i Sneg.* Ice and snow. 2013, 53 (3): 63–70. [In Russian].
- Osokin N.I., Sosnovskiy A.V., Chernov R.A. The coefficient of thermal conductivity of snow is its variability. *Kriosfera Zemli*. Cryosphere of the Earth. 2017, 3: 60–68. [In Russian].
- 8. *Sokratov S.A., Sato A., Kamata Y.* Water vapor in the pore space of snow. Annals of Glaciology. 2001, 32: 51–58.
- Sturm M., Holmgren J., Konig M., Morris K. The thermal conductivity of seasonal snow. Journ. of Glaciology. 1997, 43 (143): 26–41.
- Sturm M., Perovich D. K., Holmgren J. Thermal conductivity and heat transfer through the snow on the ice of the Beaufort Sea. Journ. of Geophys. Research. 2002, 8043, 107 (C10): 1–17. doi: 10.1029/2000JC000409.
- 11. *Jordan R*. A one-dimensional temperature model for a snow cover technical documentation for SNTHERM.89.

- Pozdniakov S., Tsang C.F. A self-consistent approach for calculating the effective hydraulic conductivity of a binary, heterogeneous medium // Water Resources Research. 2004. № 5. P. 1–15. https:// doi:10.1029/2003WR002617.
- Гельфан А.Н., Морейдо В.М. Динамико-стохастическое моделирование формирования снежного покрова на Европейской территории России // Лёд и Снег. 2014. Т. 136. № 2. С. 44–52.
- Dall'Amico M., Endrizzi S., Gruber S., Rigon R. A robust and energy-conserving model of freezing variablysaturated soil // The Cryosphere. 2011. № 5. P. 469– 484. https://doi.org/10.5194/tc-5-469-2011.
- Côté J., Konrad J-M. A generalized thermal conductivity model for soils and construction materials // Canadian Geotechnical Journ. 2005. V. 42. P. 443–458. https://doi.org/10.1139/104-106.
- Allen R.G., Pereira S., Raes D., Smith M. Crop evapotranspiration guidelines for computing crop water requirements // FAO Irrigation and Drainage. Paper 56. Food and Agriculture Organization of the United Nations. 1998. 281 p.
- 17. Гриневский С.О., Маслов А.А., Поздняков С.П. Опыт создания и применения комплекса режимных гидрогеологических наблюдений в условиях Звенигородского учебного полигона МГУ им. М.В. Ломоносова // Инженерные изыскания. 2011. № 5. С. 30–34.
- 18. *Калюжный И.Л, Лавров С.А.* Влияние климатических изменений на глубину промерзания почв в бассейне р. Волга // Лёд и Снег. 2016. Т. 56. № 2. С. 207–220.

U.S. Army Corps of Engineers. Cold Regions Research & Engineering Laboratory. Special Report 91–16. 1991: 49 p.

- Pozdniakov S., Tsang C.F. A self-consistent approach for calculating the effective hydraulic conductivity of a binary, heterogeneous medium. Water Resources Research. 2004, 5: 1–15. doi: 10.1029/2003WR002617.
- Gelfan A.N., Moreido V.M. Dynamic-stochastic modeling of snow cover formation on the European territory of Russia. *Led i Sneg.* Ice and Snow. 2014, 2 (126): 44–52. [In Russian].
- Dall'Amico M., Endrizzi S., Gruber S., Rigon R. A robust and energy-conserving model of freezing variably-saturated soil. The Cryosphere. 2011, 5: 469–484. https://doi.org/10.5194/tc-5-469-2011.
- Côté J., Konrad J-M. A generalized thermal conductivity model for soils and construction materials. Canadian Geotechnical Journ. 2005, 42: 443–458. https:// doi.org/10.1139/104-106.
- 16. Allen R.G., Pereira S., Raes D., Smith M. Crop evapotranspiration guidelines for computing crop water requirements. FAO Irrigation and Drainage. Paper 56. Food and Agriculture Organization of the United Nations, 1998. 281 p.
- Grinevskiy S.O., Maslov A.A., Pozdnyakov S.P. Experience in the creation and application of a complex of regime hydrogeological observations in the conditions of the Zvenigorod training ground of the Moscow State University. *Inzhenernye izyskaniya*. Engineering Survey. 2011, 5: 30–34. [In Russian].
- Kalyuzhny I.L, Lavrov S.A. Effect of climate changes on the soil freezing depth in the Volga River basin. Led i Sneg. Ice and Snow. 2016, 56 (2): 207–220. [In Russian].