

Ледники и ледниковые покровы

УДК 910.1:551.8

Описание миграции линии налегания в двумерной математической модели ледникового щита

© 2013 г. О.О. Рыбак^{1,2}, Е.А. Рыбак^{2,3}¹Departement Geografie and Earth System Sciences, Vrije Universiteit Brussel;²Сочинский научно-исследовательский центр РАН; ³Институт природно-технических систем РАН, Сочи

orybak@vub.ac.be

Статья принята к печати 4 марта 2013 г.

Антарктида, вариации климата, ледниковый щит, линия налегания, математическая модель, течение льда, шельфовый ледник.

Antarctica Ice Sheet, climatic variations, grounding line, ice flow, ice shelf, mathematical model.

Объём ледниковых щитов, основание которых лежит ниже уровня моря, сокращается главным образом в результате смещения линии налегания в глубь континентальной области предположительно в результате потепления окружающих его вод океана. Для оценки потенциального вклада ледниковых щитов в будущее увеличение уровня моря в математических моделях необходимо как можно точнее описывать процесс миграции линии налегания. В статье рассматривается алгоритм миграции, в основе которого лежит задание граничного условия потока массы на линии налегания. В численных экспериментах ледниковый щит, будучи выведенным из равновесия внешним воздействием, возвращается к своему первоначальному состоянию при прекращении действия внешней силы. После соответствующей доработки алгоритм можно применять в комплексных моделях ледниковых щитов.

Введение

Граница между ледниковым покровом и шельфовым ледником (на тех участках, где последний окружает ледниковый щит), т.е. линия налегания, подвижна. Её положение постоянно меняется в зависимости от изменения баланса массы ледникового щита, температуры льда, колебаний уровня Мирового океана и т.д. С физической точки зрения, фундаментальная разница между шельфовым ледником и ледниковым щитом заключается в том, что шельфовый ледник находится в гидростатическом равновесии с водами океана. Линия налегания служит резкой границей между этими двумя областями, так как динамика льда в континентальной и шельфовой зонах качественно различна [22]. Во внутриконтинентальной области течение льда определяется в основном тангенциальными напряжениями в вертикальной плоскости, роль же продольных и трансверсальных напряжений (тангенциальные напряжения в горизонтальной плоскости) мала, за исключением районов ледоразделов, а также участков со слож-

ным рельефом ложа и окраин ледниковых щитов [11]. Если нижняя граница континентального ледникового щита находится ниже уровня моря, то его относят к морскому типу. Так, ниже уровня моря расположена нижняя граница Западно-Антарктического ледникового щита. Считается, что участки морского ледникового щита могут находиться в неустойчивом равновесии, если высота подстилающей поверхности увеличивается в направлении океана [1].

Согласно недавним наблюдениям, объём Западно-Антарктического ледникового щита сокращается (исчерпывающий обзор приведён в работе [7]). В частности, на протяжении последних лет для ледника Пайн-Айленд отмечаются практически постоянное ускорение течения и сокращение толщины. Последнее обусловлено отступанием линии налегания в глубь покровного оледенения на 30 км начиная с 1970-х годов.

Устойчивость или неустойчивость морского ледникового щита обусловлена динамикой линии налегания. В настоящее время физические меха-

низмы, вызывающие перемещение (миграцию) линии налегания, известны недостаточно хорошо и даже на качественном уровне понятны не в полной мере [10]. Именно поэтому воспроизведение в численных экспериментах процесса миграции линии налегания до недавних пор было неудовлетворительным. Однако в последние годы наметился прогресс в этом направлении. Интерес к проблеме устойчивости Западно-Антарктического ледникового щита не случаен. Увеличение приземной температуры воздуха оказывает незначительное влияние на современное покровное оледенение Антарктиды. В то же время шельфовые ледники, непосредственно контактирующие с водами Мирового океана, способны достаточно быстро реагировать на потепление вод в Южном океане. Текущее потепление климата (вне зависимости от его природы) ведёт к повышению температуры вод океана, что служит причиной ускорения таяния шельфовых ледников [21]. Механическое разрушение потенциально неустойчивого Западно-Антарктического ледникового щита в результате таяния или отступления фронта составляющих его отдельных шельфовых ледников вызвало бы значительное повышение уровня моря. Не исключено, что подобное случалось в предыдущих межледниковьях [14, 19].

Первые попытки объяснить закономерности миграции линии налегания были сделаны около сорока лет назад. Первоначально считалось, что расход массы через линию налегания растёт пропорционально изменению толщины льда [23, 24]. Р. Хайндмарш предположил, что шельфовые ледники ограниченно влияют на динамику покровных ледников и что миграция линии налегания обусловлена потоком льда в континентальной области [9]. Им же предложена концепция нейтрального равновесия, в рамках которой незначительные отклонения положения линии налегания не в состоянии ни усилить неустойчивость и вызывать отступление ледников на склонах с обратным углом наклона, ни способствовать возвращению к изначальному положению в случае с наклоном в сторону океана. А.В. Вильчинский и В.А. Чугунов [25] показали, что для описания течения стационарного двумерного ледникового щита, имеющего постоянную вязкость, требуется введение дополнительного соотношения между толщиной льда и потоком массы на линии налегания — игнорируемого ранее граничного условия для задачи Стефана. Характерная особенность процессов, описываемых в задаче Стефана, состоит в том,

что в них присутствуют неизвестные (неопределённые), заранее свободные границы между различными фазами (однородного вещества) или «многофазная зона» (в многокомпонентной среде) [2]. В теории К. Шуфа [20] такое граничное условие было сформулировано, что и послужило отправной точкой для последовавших вскоре многочисленных исследований, посвящённых изучению особенностей поведения линии налегания в одномерном случае [3, 4, 7, 17]. Шуф также вернулся к концепции неустойчивости, разработанной в работах [23, 24], экспериментально подтвердив её состоятельность с помощью относительно простых математических моделей. Позже потенциальная неустойчивость морского ледникового щита на склонах с обратным наклоном была подтверждена экспериментально другими авторами на аналогичных и более сложных моделях — [17 и обзор в работе 7].

Стратегическая задача, стоящая перед разработчиками математических моделей ледниковых щитов, — создание относительно простого и незатратного с вычислительной точки зрения алгоритма, способного описать миграцию линии налегания в комплексной трёхмерной модели ледникового щита. Как установлено экспериментально, граничное условие для потока массы на линии налегания, предложенное в исследовании [12], в принципе может быть использовано и для описания миграции линии налегания на плоскости [18, 19]. В недавнем тестировании математических моделей (в том числе и тех, которые используют концепцию Шуфа) исследовалась реакция линии налегания на изменение реологической характеристики льда в пределах эквивалентных гляциально-межгляциальным колебаниям температуры [17], и на изменение параметра базального скольжения [18]. Цель настоящей работы — проверить, насколько хорошо работает модифицированная версия алгоритма для описания реакции линии налегания, предложенного в работе [19], в случаях циклических изменений скорости аккумуляции и уровня моря.

Описание модели

Рассмотрим квадратную область размером 4000×4000 км. Изотермический ледниковый щит покоится на ложе конической формы. Центр щита и вершина конуса находятся в центре области. Лёд считается вязкой несжимаемой неньютоновской жидкостью. Термомеханическое сопряжение задаётся законом Глена с показателем $n = 3$ [15] (степень в законе Глена, связывающем скорость деформации с напряжениями). Ледниковый щит

окружён шельфовым ледником. На границе плоскости шельфовый ледник граничит с океаном. Поскольку лёд изотермичен, источники и стоки тепла не рассматриваются и уравнение сохранения энергии исключается из системы уравнений, описывающих динамику системы ледниковый щит – шельфовый ледник (рис. 1).

Эволюция локальной толщины льда H описывается уравнением

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\nabla(D\nabla H) + M_s, \quad (1)$$

где M_s – баланс массы на поверхности щита, равный пространственно-однородной скорости аккумуляции (снегонакопления) A , величина A определяется в каждом эксперименте; D – коэффициент диффузии (в англоязычной литературе D часто носит название «diffusivity»)

$$D = -|\bar{v}|H/\nabla s, \quad (2)$$

где s – высота поверхности ледника, \bar{v} – осреднённая по вертикали скорость течения.

Её компоненты на шельфовом леднике определяются следующей системой уравнений [13]:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[2\eta H \left(2\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left[\eta H \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] = \rho_i g H A_{fl}^{1/n} \frac{\partial s}{\partial x} \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[2\eta H \left(2\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[\eta H \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] = \rho_i g H A_{fl}^{1/n} \frac{\partial s}{\partial y},$$

а в области покровного оледенения сходной системой уравнений [6] –

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left[2\eta H \left(2\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left[\eta H \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] - (\beta^2)^{1/n} u^{1/n} = \\ & = \rho_i g H A_{fl}^{1/n} \frac{\partial s}{\partial x} \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial y} \left[2\eta H \left(2\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[\eta H \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] - (\beta^2)^{1/n} v^{1/n} = \\ & = \rho_i g H A_{fl}^{1/n} \frac{\partial s}{\partial y}, \end{aligned}$$

$$\text{где } \eta = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right]^{(1-n)/2n} - \text{эффек-$$

тивная вязкость; $\beta = A_{sl}^{-1}$ – коэффициент трения; A_{fl} – реологический параметр льда; ρ_i – плотность льда (значения параметров даны в таблице).

Физические константы в уравнениях модели и параметры пространственной сетки

Символ	Константа/параметр	Значение	Единица измерения
ρ_i	Плотность льда	910	кг м ⁻³
ρ_w	Плотность морской воды	1028	кг м ⁻³
A_{fl}	Реологический параметр льда	1·10 ⁻¹⁹	Па ⁻³ год ⁻¹
A_{sl}	Коэффициент трения	1·10 ⁻⁹	Н ⁻³ м ⁸ год ⁻¹
g	Ускорение свободного падения	9,81	м с ⁻²
m	Показатель степени в формуле (8)	1/3	–
n		3	
N	Общее число узлов в пространственной сетке по каждой оси	201	–
$\Delta x, \Delta y$	Шаг пространственной сетки	2·10 ⁴	м

Для расчёта миграции линии налегания необходимо задать два условия на границе раздела ледниковый щит/шельфовый ледник. Первое граничное условие относится к толщине льда на линии налегания и непосредственно следует из того очевидного факта, что на линии налегания толщина льда достигает критической величины H_g , при которой масса льда поддерживается архимедовой силой:

$$H_g = -b(\rho_w/\rho_i), \quad (5)$$

где ρ_w – плотность морской воды; b – высота ложа.

По определению, на линии налегания лёд находится в гидростатическом равновесии с океаном. В конечно-разностном представлении модельных уравнений точка, соответствующая линии налегания, не обязательно совпадает с узлом сетки; она может находиться между последним узлом, соответствующим континентальному льду, и первым узлом, отвечающим шельфовому леднику. Таким образом, миграция линии налегания в конечно-разностной модели рассматривается с помощью параметризации процессов с масштабом, меньшим разрешения сетки.

На линии налегания толщина льда H_g находится из формулы (5) по каждому из направлений – x и y . Рассмотрим функцию f , определяемую гидростатическим равновесием на линии налегания [16]:

$$f = \frac{(H_{sl} - b)\rho_w}{\rho_i H}, \quad (6)$$

где H_{sl} – уровень моря.

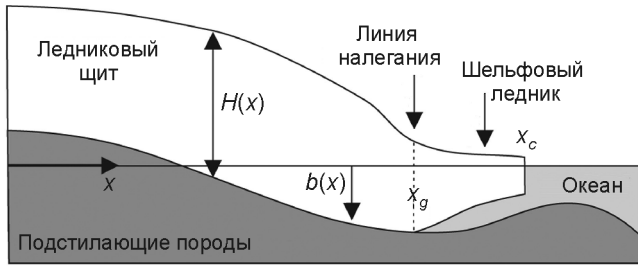


Рис. 1. Схема, иллюстрирующая постановку численных экспериментов (адаптировано из [17])

Fig. 1. A scheme illustrating set-up of the numerical experiments (adapted from [17])

Непосредственно на линии налегания $f = 1$, в континентальной области $f < 1$, а на шельфовом леднике $f > 1$. Точное значение координаты линии налегания x_g определяется путём линейной интерполяции между последней «континентальной» точкой j и первой «шельфовой» точкой $j + 1$:

$$x_g = \frac{1 - f_j + \nabla f x_j}{\nabla f}, \quad (7)$$

где $\nabla f = (f_{j+1} - f_j) / \Delta x$.

Аналогичное соотношение можно записать и для положения линии налегания на оси y . В соответствии с [20] поток массы Q_g на линии налегания задаётся как

$$Q_g = \left[\frac{A_{fl} (\rho_i g)^{n+1} (1 - \rho_i / \rho_w)^n}{4^n C} \right]^{\frac{1}{m+1}} H_g^{\frac{m+n+3}{m+1}}, \quad (8)$$

где $C = A_{sl}^{-1/3}$ – параметр базального скольжения; $m = 1/3$, что соответствует скольжению льда по жёсткому ложу [8].

На боковых границах задаются граничные условия для градиентов скорости, которые для неограниченно и свободно растекающегося льда, находящегося в гидростатическом равновесии, выражаются, как показано в [12], следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{side} &= \dot{\epsilon}_{xx} = 3A_{fl} \tau_{xx}^3; \\ \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{side} &= \dot{\epsilon}_{yy} = 3A_{fl} \tau_{yy}^3; \\ \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \Big|_{side} &= \dot{\epsilon}_{xy} = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

В выражении (9) напряжения τ_{ij} и скорости деформаций $\dot{\epsilon}_{ij}$ симметричны по горизонтальным

координатным осям: $\tau_{xx} = \tau_{yy}$, $\tau_{xy} = 0$, $\dot{\epsilon}_{xx} = \dot{\epsilon}_{yy}$,

$\dot{\epsilon}_{xx} = 0$, а $\tau_{xx} = \tau_{yy} = \frac{1}{6} \rho_i g H \left(1 - \frac{\rho_i}{\rho_w} \right)$. На внешней

границе шельфового ледника (на ледниковом фронте) толщина льда находится из условия сохранения массы.

Уравнение (1), будучи преобразованным в систему линейных алгебраических уравнений, решается методом прогонки [12]; системы уравнений (3) и (4) – итеративно, методом точечной релаксации [12] на смещённой сетке, относящейся к C-типу по классификации Аракавы [5] (рис. 2, I). Хотя граничное условие (8) разработано для одномерного случая, в работе [19] предложено использовать его на плоскости и рассматривать линию налегания как серию отрезков. В этом случае линия налегания может перемещаться как отрезок, перпендикулярный какой-либо из осей x или y . Поскольку выражение (8) определяет перемещение линии налегания только в направлении координатных осей, для её реалистического представления в двумерном случае необходимо принять во внимание направление движения потока. В противном случае изначально круглый по форме ледниковый щит, как показали предварительные эксперименты, приобретает октагональную форму. Это обстоятельство, по-видимому, не было принято во внимание в исследовании [19].

В нашей модели направление нормали рассчитывается, исходя из направления градиента поверхности ледникового щита в континентальной области (см. рис. 2, II). В качестве граничных условий для скорости течения шельфового ледника мы используем не абсолютные значения скорости, как это сделано в работе [19], а их проекции на координатные оси. При этом амплитуда компонент скорости корректируется в соответствии с локальной толщиной льда в узлах смещённой сетки, в которых происходило присвоение граничных условий. Найденные таким образом значения компонент скорости используются в качестве граничных условий для выражения (3) на шельфовом леднике и для выражения (4) в области континентального оледенения. В модели не используется эвристическое правило присвоения граничных условий тому или иному узлу в зависимости от величины потока массы на шельфовом леднике [19]. Его применение ведёт к осцилляциям положения линии

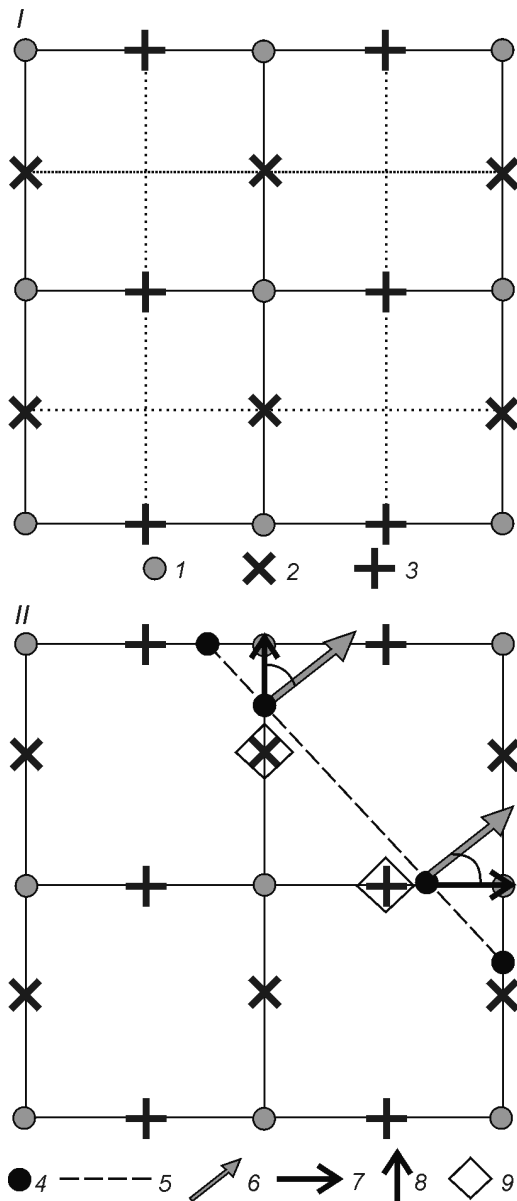


Рис. 2. *I* – пространственная сетка для численного решения уравнений (3) и (4); *II* – присвоение краевых значений компонент скорости в области ледникового шельфа.

I – узлы основной сетки, в которых рассчитывается толщина льда H ; 2, 3 – узлы смещённой сетки, в которых рассчитываются компоненты u и v вертикально-осреднённой скорости течения льда; 4 – точки расчёта потока массы через линию налегания Q_g ; 5 – линия налегания; 6 – потоки массы, нормальные к линии налегания; 7, 8 – проекции потока массы на координатные оси; 9 – узлы смещённой сетки, которым присваивается граничное условие скорости течения

Fig. 2. *I* – spatial mesh for numerical solution of equations (3) and (4); *II* – assigning of the boundary conditions in the ice shelf domain.

I – points of the main grid, where ice thickness (H) is calculated; 2, 3 – points of the staggered grid, where u and v components of the vertically averaged flow velocity are calculated; 4 – points, where mass flux across the grounded line, Q_g , is calculated 5 – grounding line; 6 – mass fluxes normal to the grounding line; 7, 8 – projections of the mass fluxes on the coordinate axes; 9 – where boundary condition on horizontal velocity is applied

налегания относительно равновесного положения и в режиме отступления линии налегания в глубь континентальной области, что не позволяет достигнуть действительно стационарного состояния [3, 4, 7]. Поскольку модельный ледниковый щит имеет круглую форму, из настоящей версии модели исключён эффект «поддержки», хотя последний может заметно повлиять на положение линии налегания на побережьях со сложной конфигурацией [20].

Численные эксперименты и их результаты

Цель проводимых численных экспериментов – показать, что метод описания миграции линии налегания, основанный на задании граничного условия для потока массы, можно использовать на плоскости при переходе от одного равновесного состояния к другому. Длительность двух тестов составила 50 тыс. модельных лет.

Эксперимент 1 (A-тест). Ледниковый щит, находящийся в равновесном состоянии, выводится из него путём увеличения скорости аккумуляции A от 0,1 до 0,2 м/год. Уровень моря $H_{sl} = 0$ м. После того, как достигается новое равновесие, скорость аккумуляции приводится к первоначальному значению $A = 0,1$ м/год.

Эксперимент 2 (H-тест). Ледниковый щит, находящийся в равновесном состоянии, выводится из него путём снижения уровня моря до отметки $H_{sl} = -50$ м. Скорость аккумуляции при этом не меняется – $A = 0,1$ м/год. После того, как достигается новое равновесие, уровень моря возвращается к первоначальному значению $H_{sl} = 0$ м.

Оба теста схематически описывают смену фаз межледниковье (современный уровень моря) – оледенение (падение уровня моря) – межледниковье (возвращение к современному уровню). Принципиальная разница между тестами заключается в том, что в первом случае происходит скачкообразное изменение внешнего воздействия, а во втором – постепенное, в течение 10 тыс. модельных лет. Как и в одномерном случае [3, 4, 7], размеры ледника в конечной фазе тестов (рис. 3, *Iв* и *IIв*) очень близки к его размерам в начале (см. рис. 3, *Iа* и *IIа*). Точно так же поле скоростей течения льда в конце теста практически совпадает с полем в начале теста. Конечное положение линии налегания соответствует начальному с точностью двух шагов пространственной сетки. Ледник, что немаловажно, сохраняет округлую форму в течение всего времени проведения эксперимента.

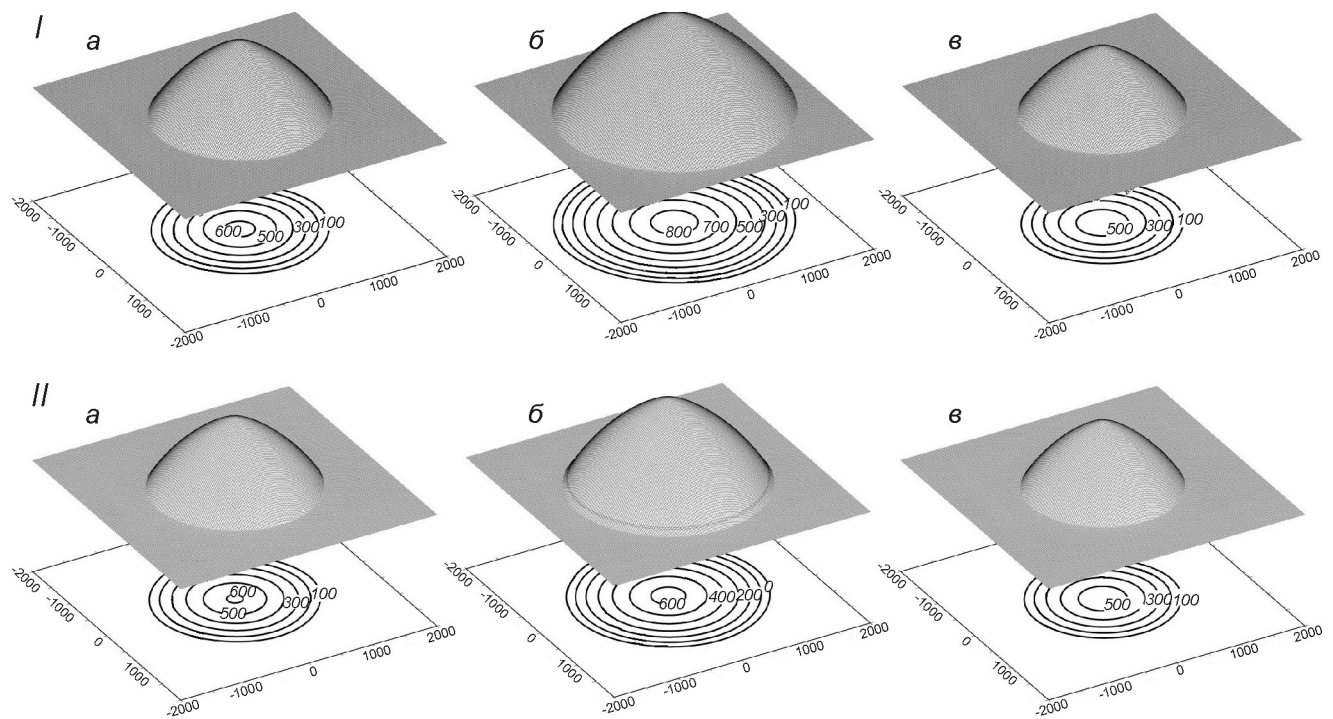


Рис. 3. Модельный ледниковый щит в трёх фазах:

I – *A*-тест; *II* – *H*-тест; *a* – первоначальное равновесное состояние; *б* – максимальное продвижение в область шельфового ледника при увеличении скорости аккумуляции; *в* – возвращение к первоначальному состоянию при снижении скорости аккумуляции; на нижних плоскостях показаны изолинии высоты поверхности (м над ур. моря); разметка области дана в км от центра

Fig. 3. Modelled ice sheet in three phases:

I – *A*-test; *II* – *H*-test; *a* – initial equilibrium state; *б* – maximum expansion into the ice shelf domain after accumulation rate increased; *в* – retreat to the initial state after accumulation rate decreased; isolines of the surface elevation (m a.s.l.) are shown in the lower plates; axes' labels indicate distance from the center of the domain

Заключение

Описание миграции линии налегания в двух- и трёхмерных математических моделях систем «ледниковый щит/шельфовый ледник» – сложная задача, прежде всего из-за отсутствия соответствующей общей теории. К компромиссному решению относится эвристическое распространение на двумерный случай зарекомендовавшей себя теории для одномерного случая. Чтобы ледниковый щит сохранял свою первоначальную форму, в качестве краевых значений необходимо использовать проекции скорости на координатные оси. При соблюдении этих условий модельный ледниковый щит под действием вынуждающего внешнего воздействия переходит из одного равновесного состояния в другое, а после прекращения вынуждающего воздействия возвращается в первоначальное состояние. При этом положение линии налегания после прекращения внешнего воздействия в финальном равновесном состоянии совпадает с первоначальным с точностью до двух шагов пространственной сетки.

Для практического использования алгоритма в более сложных неизоотермических трёхмерных моделях необходимо решить ряд проблем, касающихся вертикального распределения температуры льда, адвекции температуры через линию налегания, а также проблем, обусловленных сложной конфигурацией внешних границ щита. В частности, необходимо разработать (или в значительной мере переработать предложенную в работе [19]) методику расчёта эффекта поддержки шельфового ледника. Эффект поддержки существенно влияет на поток льда через линию налегания в полузамкнутых образованиях (бухты, острова, выступы ложа ниже по течению льда). В малых временных масштабах (~100 лет), много меньших, чем гляциально-межгляциальные колебания (~100 тыс. лет), изменения средней скорости аккумуляции или уровня Мирового океаны недостаточны, чтобы значительно изменить очертания ледникового щита, поэтому на первое место выходит влияние именно эффекта поддержки. В дальнейшем предполагается выполнить соответствующую-

щую модификацию модели, сохранив основной принцип описания миграции линии налегания.

Работа выполнена в рамках Проекта 7.4 Программы фундаментальных исследований Президиума РАН «Оценка геоэкологических опасностей и рисков; снижение их негативных последствий на основе изучения адаптационных процессов».

Литература

1. Гросвальд М.Г. Покровные ледники континентальных шельфов. М: Наука, 1983. 216 с.
2. Данилюк И.И. О задаче Стефана // Успехи математических наук. 1985. Т. 40. Вып. 5 (245). С. 133–185.
3. Рыбак О.О. Моделирование миграции границы морского ледникового щита в простой численной модели // Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2010. № 4. С. 126–130.
4. Рыбак О.О. Миграция границы морского ледникового щита в численной модели // Вестн. Южного науч. центра РАН. 2010. № 4. С. 50–56.
5. Arakawa A., Lamb V. Computational design of the basic dynamical processes of the UCLA general circulation model // Methods in Computational Physics: V. 17 / Ed. J. Chang. San Francisco: Academic Press, 1977. P. 174–267.
6. Bueler E., Brown J. Shallow shelf approximation as a «sliding law» in a thermomechanically coupled ice sheet model // Journ. of Geophys. Research. 2009. V. 114. F03008. doi:10.1029/2008JF001179.
7. Docquier D., Perichon L., Pattyn F. Representing grounding line dynamics in numerical ice sheet models: Recent advances and outlook // Surveys in Geophysics. 2011. V. 32. P. 417–435.
8. Fowler A.C. A theoretical treatment of sliding of glaciers in absence of cavitation // Philosophical Transactions of the Royal Society: Series A. 1981. V. 298. P. 637–685.
9. Hindmarsh R.C.A. Stability of ice rises and uncoupled marine ice sheets // Annals of Glaciology. 1996. V. 23. P. 105–115.
10. Hindmarsh R.C.A. The role of membrane-like stresses in the determining the stability and sensitivity of the Antarctic ice sheets: back pressure and grounding line motion // Philosophical Transactions of the Royal Society: Series A. 2006. V. 364. P. 1733–1767. doi:10.1098/rsta.2006.1797.
11. Hutter K. Theoretical Glaciology: material science of ice and the mechanics of glaciers and ice sheets. Dordrecht: D. Reidel, 1983. 510 p.
12. Huybrechts P. The Antarctic ice sheet and environmental change // Berichte zur Polarforschung. 1992. V. 99. 241 p.
13. MacAyeal D.R., Rommelaere V., Huybrechts P., Hulbe C.L., Determann J., Ritz C. An ice-shelf model test based on the Ross ice shelf // Annals of Glaciology. 1996. V. 23. P. 46–51.
14. Oppenheimer M. Global warming and the stability of the West Antarctic Ice Sheet // Nature. 1998. V. 393. P. 325–332.
15. Paterson W.S.B. The physics of glaciers. Oxford: Elsevier, 1994. 480 p.
16. Pattyn F., Huyghe A., De Brabander S., De Smedt B. Role of transition zones in marine ice sheet dynamics // Journ. of Geophys. Research. 2006. V. 111. F02004. doi:10.1029/2005JF000.
17. Pattyn F., Schoof C., Perichon L., Hindmarsh R.C.A., Bueler E., de Fleurian B., Durand G., Gagliardini O., Gladstone R., Goldberg D., Gudmundsson G.H., Huybrechts P., Lee V., Nick F.M., Payne A.J., Pollard D., Rybak O., Saito F., Vieli A. Results of the Marine Ice Sheet Model Intercomparison Project, MISMIP // The Cryosphere. 2012. V. 6. P. 573–588.
18. Pattyn F., Perichon L., Durand G., Favier L., Gagliardini O., Hindmarsh R.C.A., Zwinger T., Abrecht T., Cornford S., Docquier D., Fürst J.J., Goldberg D., Gudmundsson G.H., Humbert A., Hütten M., Huybrechts P., Jouvet G., Kleiner T., Larour E., Martin D., Morlighem M., Payne A.J., Pollard D., Rückamp M., Rybak O., Seroussi H., Thoma M., Wilkens N. Grounding-line migration in plan-view marine ice-sheet models: results of the ice2sea MISMIP3d intercomparison // Journ. of Glaciology. 2013. V. 59. P. 410–422.
19. Pollard D., DeConto R. Modeling West Antarctic Ice Sheet growth and collapse through the last 5 million years // Nature. 2009. V. 458. P. 329–332. doi:10.1038/nature07809.
20. Schoof C. Ice sheet grounding line dynamics: steady states, stability and hysteresis // Journ. of Geophys. Research. 2007. V. 112. F03S28. doi:10.1029/2006JF000664.
21. Shepherd A., Wingham D., Rignot E. Warm ocean is eroding West Antarctic Ice Sheet // Geophys. Research Letters. 2004. V. 31. L23402. doi:10.1029/2004GL021106.
22. Shumskiy P.A., Krass M.S. Mathematical models of ice shelves // Journ. of Glaciology. 1976. V. 17. P. 419–432.
23. Thomas R.H., Bentley C.R. A model for Holocene retreat of the West Antarctic ice sheet // Quaternary Research. 1978. V. 10. P. 150–170.
24. Weertman J. Stability of the junction of an ice sheet and an ice shelf // Journ. of Glaciology. 1974. V. 13. P. 3–11.
25. Wilchinsky A.V., Chugunov V.A. Ice-stream-ice-shelf transition: theoretical analysis of two-dimensional flow // Annals of Glaciology. 2000. V. 30. P. 153–162.

Summary

Contemporary thinning of the marine-based areas of ice sheets is believed to be the consequence of the grounding line retreat caused mainly by ocean gradual warming beneath the ice shelves. In order to estimate potential contribution of ice sheets into the future sea-level rise grounding line migration must be accurately described in the mathematical models. We incorporated an algorithm based on application of the boundary condition on the mass flux across the grounding line into a two-dimensional ice flow model. In the numerical experiments, externally forced ice sheet returns to its initial equilibrium state after termination of the external forcing (either accumulation rate or sea-level change anomalies). In future, the model will be modified to incorporate buttressing effect.