

**Волновые структуры в ледяном поле и их влияние на прочность солёного льда**© 2020 г. В.П. Елифанов<sup>1\*</sup>, К.Е. Сазонов<sup>2,3</sup><sup>1</sup>Институт проблем механики имени А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия; <sup>2</sup>Крыловский государственный научный центр, Санкт-Петербург, Россия; <sup>3</sup>Санкт-Петербургский морской технический университет, Санкт-Петербург, Россия  
\*evp@ipmnet.ru**Wave structures in the ice field and influence of them on the strength of salt ice**V.P. Epifanov<sup>1\*</sup>, K.E. Sazonov<sup>2,3</sup><sup>1</sup>Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia;  
<sup>2</sup>Krylov State Research Center, St. Petersburg, Russia; <sup>3</sup>Saint-Petersburg State Maritime Technical University, St. Petersburg, Russia  
\*evp@ipmnet.ru*Received May 19, 2020 / Revised July 13, 2020 / Accepted September 9, 2020***Keywords:** *dynamic metamorphism, ice field, interference, local hardness, spatial-temporal variability.***Summary**

The heterogeneity of the strength of the ice field of the dynamic type of formation with an area of 800 m<sup>2</sup> was investigated in time and space. It is shown that stationary periodic wave structures are formed in a closed volume of an ice field lying on the surface of a liquid in a rectangular basin. In a case of absence of any external influences, the dominant source of elastic waves in the ice is the coherent radiation of them on freezing of water, i.e. the ice field itself. Another wave structures, i.e. standing waves, form secondary ice textures in the ice field with diminished strength. Local hardness of ice was chosen as the criterion of strength. The recurrence of local hardness values as a function of coordinates of the measurement points in the longitudinal and transverse profiles of the ice field was determined. The hardness values vary from 40 to 60% with an axial force measurement error of 5%. The experimental relations are approximated by periodic curves, in which the maxima and minima of local hardness correlate with the nodes and antinodes of standing waves, respectively. The decrease in local ice hardness in the secondary textures is explained by high-frequency dynamic metamorphism. The wavelengths corresponding to bending-gravitational and longitudinal waves are identified, with the interference of which stationary periodic wave structures are formed. A similar regularity of changes in local hardness was revealed also in a river ice. The results obtained allow us to consider nonlinear wave phenomena as one of the factors controlling the spatial-temporal variability of the ice strength characteristics.

**Citation:** Epifanov V.P., Sazonov K.E. Wave structures in the ice field and influence of them on the strength of salt ice. *Led i Sneg*. Ice and Snow. 2020. 60 (4): 623–636. [In Russian]. doi: 10.31857/S2076673420040066.*Поступила 19 мая 2020 г. / После доработки 13 июля 2020 г. / Принята к печати 9 сентября 2020 г.***Ключевые слова:** *динамический метаморфизм, интерференция, ледяное поле, локальная твёрдость, пространственно-временная изменчивость.*

Установлено, что в ледяном поле динамического типа формирования под действием стоячих волн образуются стационарные периодические волновые структуры. Определены масштабы таких структур. Изменение локальной твёрдости объясняется высокочастотным динамическим метаморфизмом льда в зонах пучностей стоячих волн. Показано, что источником упругих колебаний может быть когерентное излучение упругих волн при замораживании воды. Формирование аналогичных волновых структур в природном льде подтверждено полевыми измерениями твёрдости в речном ледяном покрове. Нелинейные волновые явления рассматриваются как один из факторов пространственно-временной изменчивости прочностных характеристик льда.

**Введение**

В течение длительного времени волновой метаморфизм льда как совокупность деформационных структурно-текстурных его изменений в ледяном покрове остаётся объектом научных исследований, например [1–4]. В лаборатор-

ных условиях также пытались анализировать формирование текстур льда с малой динамической вязкостью под действием волн конечной амплитуды, включая физическое моделирование движения льда в придонных слоях ледников [5]. Однако до сих пор недостаточно изучены вопросы, связанные с влиянием ре-

зонансных явлений на пространственную изменчивость прочностных свойств льда, а также сценарии влияния импульсов напряжений или волн на процесс разрушения ледяного поля. Логическое продолжение исследований волнового метаморфизма льда — физическое моделирование формирования ледяных полей и прямое исследование их пространственно-временных прочностных характеристик.

### Постановка задачи исследований

Цель настоящей работы — изучение влияния волновых процессов на прочность природного льда в частично замкнутых объёмах. Необходимо было установить признаки, характеризующие повторяемость волновых движений, и определить результаты этих движений. Концепция исследования состоит в том, что из-за неизбежных случайных толчков в ледяном поле присутствуют малые собственные колебания, которые вызывают параметрический резонанс, действие которого проявляется в локальном повышении пластичности льда. Индикаторами волновых процессов при этом становятся вторичные текстуры льда. Для замкнутого объёма простой формы, например ледового бассейна в виде прямоугольного параллелепипеда, повторяемость волновых движений будет проявляться в периодичности вторичных текстур, соответствующих чередованию пучностей и узлов стоячих волн. В качестве объекта исследования выбран солёный лёд — материал, имеющий практическую значимость и заведомо обеспечивающий большой эффект ввиду низкого модуля. Сначала была исследована пространственно-временная изменчивость прочностных свойств ледяного поля в ледовом бассейне. В качестве критерия прочности выбрана локальная твёрдость, которая многократно определяется в продольных и поперечных профилях ледяного поля. Применялся комплексный подход, основанный на акустико-механическом методе. Эта часть исследований выполнялась в Крыловском государственном научном центре (Санкт-Петербург) [6]. Затем достоверность формирования волновых текстур проверялась в условиях естественного залегания на речном льде (река Десна под Москвой).

### Предмет исследования, методики и аппаратура

В качестве представительного объекта исследований выбрано ледяное поле моделированного льда в ледовом бассейне Крыловского государственного научного центра [6] площадью  $800 \text{ м}^2$  (длина ледяного поля 80 м, ширина 10 м). С двух сторон по периметру оно приморожено к твёрдым вертикальным стенкам и к одной торцевой (наклонной) стенке бассейна. Бассейн прямоугольной формы на 80% (64 м) длины заполнялся водой до уровня 2 м, а оставшаяся часть (16 м) заполнялась до уровня 4 м. Моделированный лёд готовился путём «засева» ледяными гранулами водной поверхности воды. Для этого холодная солёная вода распылялась в атмосфере ледового бассейна при температуре воздуха  $-20 \div -25 \text{ }^\circ\text{C}$  [6]. Осевшие на поверхность воды ледяные частицы со средним диаметром 0,5 мм «спекались» и формировали ледяной каркас, подобный снегу. Такой лёд, по классификация Н.В. Черепанова [7], соответствует льду типа В9. Солёность воды составляет 13,2 ‰, льда — 6,7 ‰. Прочность моделированного льда на изгиб — 18 кПа, на сжатие — 38 кПа, модуль деформации  $E = 22 \text{ МПа}$ , средняя плотность —  $930 \text{ кг/м}^3$  (приведены средние значения); толщина льда — от 40 до 53 мм. С методической точки зрения такие свойства льда, как низкий модуль упругости и высокая гомологическая его температура (0,95), а также остаточные напряжения, возникающие при формировании ледяного поля, наиболее соответствуют выполнению поставленной задачи исследования.

Твёрдость моделированного льда измеряли с помощью портативного пенетromетра, снабжённого крестообразным наконечником [8]. Наконечник такой формы имеет высокую чувствительность к структуре, поскольку при миделевом сечении  $2,5 \text{ см}^2$  имеет рабочую поверхность  $72,8 \text{ см}^2$  и при измерениях контактирует с большим количеством ледяных кристаллов. Синхронно с измерениями твёрдости регистрировали параметры акустической эмиссии. Число измерений локальной твёрдости в продольных и поперечных профилях ледяного поля было достаточным для построения аппроксимирующей функции, характеризующей пространственную неоднородность прочности ледяного поля (до 125 точек на кривую). Структура льда определялась по шлифам

в поляризованном свете. В условиях залегания количественное исследование микроструктуры льда выполняли с помощью акустических методов: акустической эмиссии и импульсно-фазового. Комплексный подход позволяет связать микроструктуру льда и акустические характеристики с макромеханикой льда. Акустические параметры отражают изменение структуры льда в интегральном виде, поэтому их связь с микроструктурой даётся в виде простых уравнений без потери достоверности. Методики измерений и используемая аппаратура приведены в работе [8].

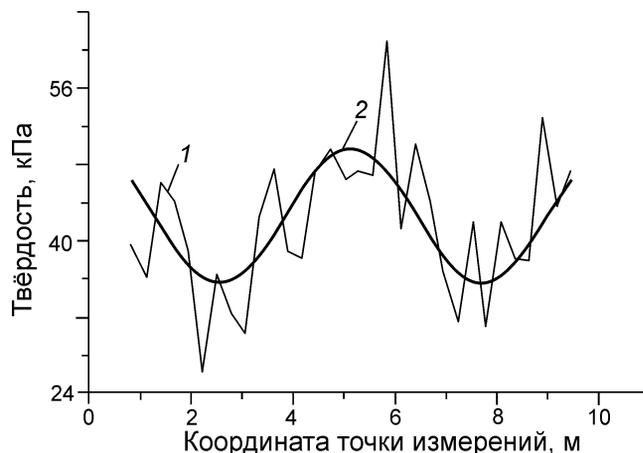
### Результаты исследований

Типичная зависимость локальной твёрдости льда от координаты точек измерений *в поперечном* профиле ледового бассейна представлена периодической кривой 1 на рис. 1. Вариации твёрдости составляют  $43 \pm 2\%$  в интервале от 26 до 60 кПа при ошибке измерений осевой силы 5%. Локальная твёрдость  $\sigma_T$  определялась путём измерения осевой силы  $P$ , которая воздействует на наконечник с миделевым сечением  $S = 2,5 \text{ см}^2$ , и рассчитывалась по формуле  $\sigma_T = P/S$ . Периодическое чередование минимумов и максимумов на кривой 1 (см. рис. 1) указывает на волновую природу изменения прочностных свойств льда. Поскольку в поперечном профиле ледяное поле ограничено плоскими параллельными стенками бассейна, при нормальном падении бегущей волны на границу раздела соприкасающихся сред (льда и бетона) возникает стоячая волна. Условия формирования стоячей волны определяются отношением волновых сопротивлений бетона  $\rho_k V_k$  и льда  $\rho_0 V_0$ :

$$m_{0k} = (\rho_k V_k) / (\rho_0 V_0) = (1800 \cdot 3770) / (980 \cdot 3800) = 1,8. \quad (1)$$

Согласно рассчитанному по соотношению (1) значению величины  $m_{0k}$ , границу раздела лёд–бетон нельзя считать ни абсолютно жёсткой, ни абсолютно податливой. Часть упругой энергии отразится от стенки бассейна и в виде отражённой волны наложится на падающую волну. В результате в ледяном поле сформируется стоячая волна, а во льду будет наблюдаться сочетание стоячей и бегущей волн.

Поскольку, согласно экспериментальным данным (кривая 1 на рис. 1), вблизи стенок наб-



**Рис. 1.** Зависимость твёрдости льда от координаты точки измерений в профиле по ширине ледового бассейна: 1 — экспериментальная кривая; 2 — аппроксимация

**Fig. 1.** Dependence of ice hardness on the coordinate of the measurement point in the profile along the width of the ice pool:

1 — experimental curve; 2 — approximation

людается максимум локальной твёрдости и эти максимумы на кривой соответствуют узлам скоростей стоячей волны (лёд приморожен к стенке), максимальное уменьшение прочностных характеристик льда следует ожидать в пучностях скоростей стоячей волны. Отметим, что энергия колебаний стоячей волны локализована между соседними пучностями давления и скорости. Именно в объёмах с характерным размером  $\lambda/2$  происходит переход из упругой (потенциальной) в кинетическую энергию и обратно. Из-за локализации циклических деформаций происходит накопление дислокаций и уменьшение локальной твёрдости (усталостное разупрочнение).

Сравнение экспериментальных зависимостей локальной твёрдости от точек измерений, полученных для поперечных профилей на разных длинах бассейна, позволяет сделать вывод, что плоскости узловых линий параллельны стенкам бассейна. Данный экспериментальный факт подтверждает также формирование стоячей волны между стенками бассейна. Проведённые эксперименты говорят о волновой природе изменений прочностных свойств льда и конкретизируют её функциональную структуру, характерную для стоячей волны. Таким образом, экспериментальная кривая локальной твёрдости (кривая 1 на рис. 1) представляет собой зеркальное отражение узлов и пучностей стоячей волны.

Стоячая волна, как колебания с периодически изменяющейся амплитудой и с характерным пространственным чередованием узлов и пучностей, образуется в результате сложения (интерференции) волн. В рассматриваемом случае плоская стоячая волна формируется внутри ледяного поля между твёрдыми боковыми стенками бассейна. Если ледяное поле приморожено к идеально твёрдой стенке, то на ней образуются узел скорости и пучность перепада давления. При сложении падающей и отражённой волн, имеющих одинаковые амплитуды  $A_0$ , частоты и длины волн  $\lambda$ , смещение  $\chi$  в результирующей (стоячей) волне записывается в виде следующего уравнения:

$$\chi = (2A_0|\sin(2\pi x/\lambda)|)\cos\omega t, \quad (2)$$

где  $\omega$  – циклическая частота;  $x$ ,  $t$  – переменные значения соответственно длины и времени.

Поскольку расстояние между соседними узлами или пучностями равно  $\lambda/2$ , по экстремумам на кривой *1* рис. 1 определяется длина волны  $\lambda$ , а уравнение (2) может быть использовано для аппроксимации полученной экспериментальной зависимости. При жёстком креплении ледяного поля к стенкам бассейна смещение и скорость на границе равны нулю, фазы смещения и скорости меняются на  $180^\circ$ , а коэффициент отражения определяется из соотношения

$$R_{k0} = (m_{00} - 1)/(m_{kk} + 1) = 0,8/2,8 = 0,29. \quad (3)$$

Для условий эксперимента, согласно уравнению (3), в лёд возвращается около 30% энергии падающей волны. Поскольку при отражении волн от границ контакта льда со стенкой бассейна неизбежны потери энергии, амплитуда отражённой волны оказывается меньше амплитуды падающей волны. Соответственно в узлах амплитуда стоячей волны уменьшается не до нуля, а до некоторого минимального значения, причём незатухающие стоячие волны могут существовать в ледяном поле только при наличии источников упругих волн, которые должны компенсировать потери энергии.

Условно выделены два типа источников упругих волн – внешние и внутренние. К внешним относятся колебания, создаваемые движущейся тележкой, и периодические нагрузки, связанные с осаждением замёрзших капель воды, включая источники внешних шумов. Под внутренними источниками понимается коге-

рентное излучение упругих волн при послойном намораживании льда, а также при контактном взаимодействии льда со стенками бассейна в процессе замораживания воды (включая термические напряжения).

Текстура моделированного льда формируется в результате совместного влияния квазистатических и динамических напряжений. Динамические напряжения возникают при распространении во льду упругих волн. В стоячей волне они локализованы в ограниченных объёмах льда (между соседними пучностями давления и скорости), в которых и происходят деформационные изменения структуры. Именно условия, возникающие при переходе потенциальной энергии колебаний стоячей волны в кинетическую, оказываются определяющими для реализации дислокационного метаморфизма льда. Возникшие в этих объёмах льда изменения структуры «замораживаются» и рассматриваются как новый элемент текстуры ледяного поля. Квазистатические напряжения возникают во льду уже при фазовом переходе воды, например, при её послойном замораживании. Кроме напряжений, которые развиваются внутри образующегося слоя льда, усиливающее влияние на механизм воздействия упругих волн и на структуру моделированного льда оказывают также термические напряжения, особенно в условиях бокового стеснения. Влияние остаточных напряжений на накопление деформационных дефектов и механизм рекристаллизации – предмет дальнейших исследований.

Таким образом, каждое значение измеренной твёрдости представляет собой реплику локальной прочности льда, структура которой сформировалась под бóльшим или меньшим воздействием стоячей волны. *Минимальная твёрдость льда* соответствует пучностям стоячей волны. Именно здесь динамическая вязкость льда уменьшается, а следовательно, снижается и его твёрдость (механизм динамической рекристаллизации) [5]. Напротив, *максимальное значение твёрдости* отвечает области узловой точки стоячей волны, в которой скорость деформации минимальна. Чередование максимумов и минимумов на экспериментальной кривой *1* рис. 1 – результат накопления деформационных дефектов в характерных объёмах льда. Медленное изменение амплитуды кривой *1* на рис. 1 обусловлено модуляцией, т.е. наложением, по край-

ней мере, двух колебаний – несущей и модулирующей частоты. По расстоянию между двумя соседними максимумами на экспериментальной кривой 1 определена длина волны  $\lambda = 2$  м (продольная волна). В результате аналогичной процедуры с модулирующей волной (кривая 2) установлена длина волны  $\lambda = 5$  м (изгибно-гравитационная волна). Изгибно-гравитационная волна длиной  $\lambda = 5$  м (кривая 2) модулирует продольную волну длиной  $\lambda = 2$  м (кривая 1) с глубиной модуляции около 0,2. Обычно для исследования волновых процессов с такой длиной волны в качестве датчиков применяют геофоны. В рассматриваемом случае использовано свойство льда сохранять в «замороженном» виде вторичную текстуру льда, которая сформировалась в узлах и пучностях стоячей волны и проявляется в периодической зависимости локальной твёрдости льда от координаты точек измерений.

Независимое подтверждение такой интерпретации выделенных длин волн – оценка фазовой скорости продольной волны. Согласно Д.Е. Хейсину [9], при толщине плавающего льда много меньше длины волны  $h \ll \lambda$  фазовая скорость записывается в виде

$$V = b \{ \rho_0 (k_0 h)^3 (3(\rho_a + \rho_0 k_0 h))^{-1} [1 - (a/b)^2] \}^{1/2}, \quad (4)$$

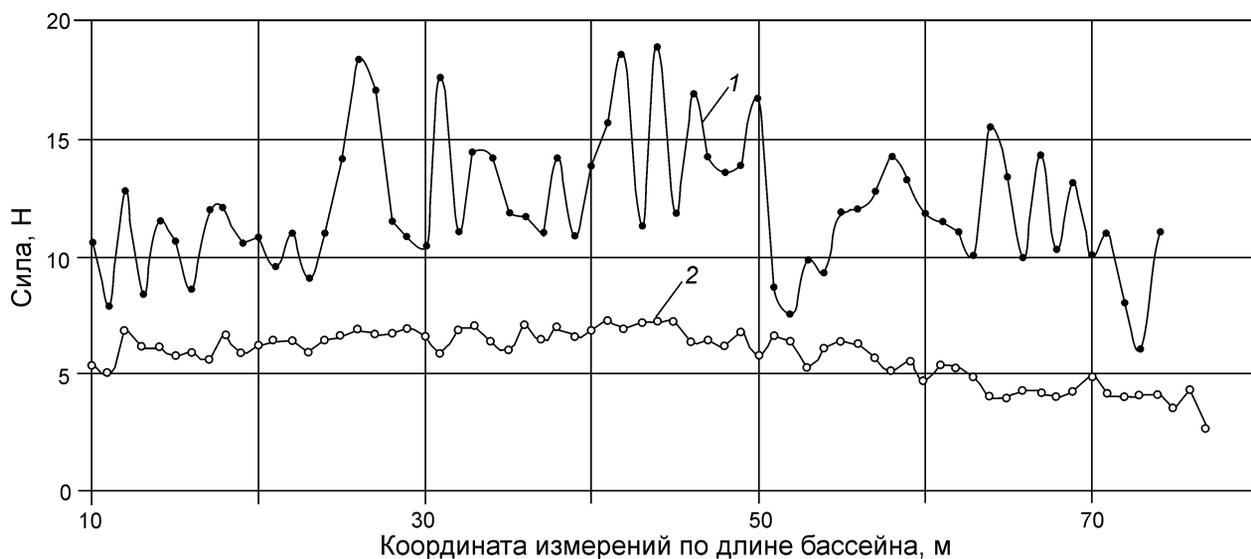
где  $h = 0,041$  м;  $a = (22 \text{ МПа}/930 \text{ кг/м}^3)^{1/2} = 153,8$  м/с и  $b = 0,65 a = 100$  м/с – соответственно скорости продольных и сдвиговых волн;  $\rho_0$ ,  $\rho_a$  – соответственно плотности льда и воды;  $k_0 = 2\pi/\lambda$  – волновое число.

Подставляя в формулу (4) значения величин, соответствующие обозначениям, находим фазовую скорость распространения  $V = 12,8$  м/с и частоту колебаний  $f = V/\lambda = 6,4$  Гц. Рассчитанные значения фазовой скорости не противоречат опубликованным в работе [4]. Близкая частота колебаний 5 Гц зарегистрирована в спектре контактного разрушения при пенетрации льда. В рассматриваемом случае необратимые изменения структуры льда под действием энергии акустической волны происходят в основном в результате комбинированного воздействия конечной амплитуды колебаний и статических напряжений. Отметим, что остаточные локальные напряжения присутствуют во льду с момента замораживания воды. Подтверждение этому – визуально наблюдаемые трещины на больших толщинах природного ледяного покро-

ва, например, на оз. Байкал. Дополнительный локальный нагрев в пучностях стоячей волны способствует уменьшению зернограничного трения, снижению предела текучести и увеличению пластичности. Можно ожидать, что максимальная эффективность этих факторов проявится на стадиях кристаллизации воды и формирования каркаса ледяного поля.

Для выявления основных закономерностей формирования волновых структур и их влияния на прочность ледяного поля была выполнена серия экспериментов. В отличие от предыдущих экспериментов измерения локальной твёрдости выполнялись в продольных профилях ледяного поля на разном удалении от стенок бассейна и в разные промежутки времени после «засева». Такая постановка процедур измерений локальной твёрдости предполагала получить ответ на вопросы, как во времени происходит накопление деформационных дефектов и какой фактор можно считать доминирующим в эволюции деформационных дефектов. Первоначально предполагалось, что к основным источникам волн относятся технологические вибрации и движущаяся нагрузка, создаваемая массой осаждающихся ледяных гранул. Эксперименты показали (рис. 2), что ледяной каркас образуется постепенно, но процесс его формирования начинается сразу, как только гранулы льда касаются свободной поверхности воды. По данным измерения локальной твёрдости и фотосъёмки микрошлифов условно выделены два этапа формирования ледяного каркаса.

*Первый этап.* Выполненные через 1 ч после приготовления поля моделированного льда измерения локальной твёрдости (кривая 2 на рис. 2) показали, что твёрдость льда достигла своего «половинного» значения. Однако акустические свойства льда и условия на границе его контакта со стенками бассейна продолжают непрерывно меняться, соответственно смещаются положения максимумов и минимумов стоячей волны. Поэтому чёткие контуры вторичных текстур льда не успевают сформироваться. Отметим, что дальнейшее образование ледяного поля (процесс спекания замёрзших капель воды и метаморфизм льда) происходило без воздействия «внешних» факторов, например, технологической вибрации и движущейся нагрузки. Поскольку процесс вторичного метаморфизма продолжал-



**Рис. 2.** Зависимость силы сопротивления солёного льда внедрению крестообразного наконечника от координаты измерений:

1 – по данным измерений, выполненных через 20 ч; 2 – по данным измерений, выполненных в течение часа после «засева»

**Fig. 2.** The dependence of the resistance force of salt ice to the introduction of a cruciform tip on the coordinate of measurements:

1 – according to measurements taken after 20 hours and 2 – within an hour after «seeding»

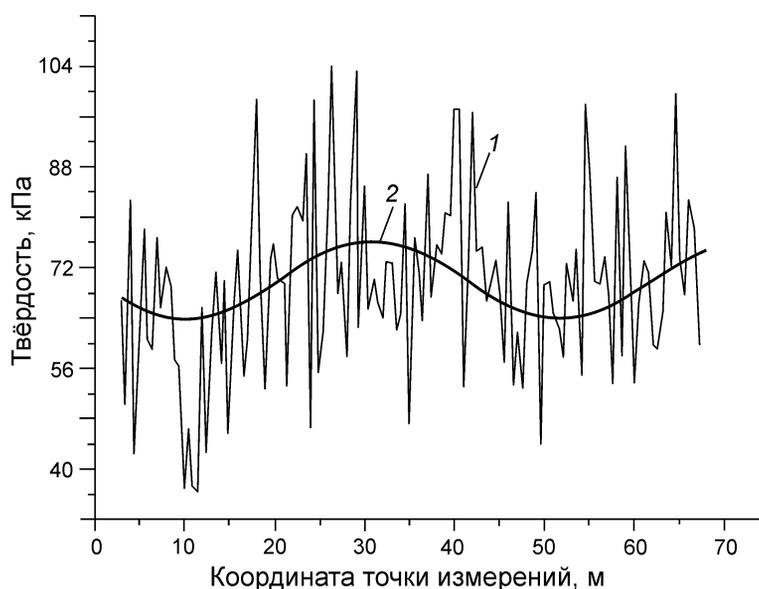
ся при отсутствии внешних вибраций, источник колебаний должен был находиться внутри ледяного поля. Такой источник, по-видимому, когерентное излучение упругих волн при замораживании воды, т.е. само ледяное поле [10].

*Второй этап.* Через 20 ч после «засева» (кривая 1 на рис. 2) влияние «внутренних» факторов проявилось в полной мере, а время оказалось достаточным для завершения формирования волновой картины прочностных свойств ледяного поля. Это, однако, не означает, что на первом этапе формирования ледяного каркаса влияние волновых структур не проявлялось. Напротив, половинная прочность ледяного каркаса была достигнута уже к первому часу и происходила под волновым воздействием, но акустические свойства ледяного каркаса и условия на границе контакта непрерывно менялись. Такая лабильность условий и свойств не позволила локализоваться дефектам. Необходимая для этого стабильность свойств и условий была достигнута только на втором этапе формирования ледяного каркаса, и картина такого влияния проявилась в полной мере (кривая 1 на рис. 2).

Анализ рис. 2 показывает, что необходимое условие для завершения формирования волновой структуры в ледяном поле – примора-

живание льда к бортам бассейна. Кроме того, необходимы два достаточных условия: первое – присутствие источника гармонических колебаний; второе – напряжённое состояние льда. Как показал эксперимент, эти условия взаимосвязаны. Под завершённостью здесь понимается формирование не только жёсткого ледяного каркаса, его способность сохранять вторичную текстуру, но и установление адгезионного контакта со стенками бассейна. Отметим, что жёсткость ледяного каркаса и степень его примерзания к стенкам бассейна определяют волновую структуру и эффективность её влияния на локальную твёрдость и прочность льда.

Исследования микрошлифов моделированного льда непосредственно по месту залегания на разных этапах подготовки ледяного поля показали, что образование ледяного каркаса сопровождается замораживанием воды между ледяными гранулами. Замораживание изменяет условия не только на границе контакта льда со стенками бассейна, но и в ледяном поле (расширение льда, нормальные напряжения и излучение когерентных колебаний). Дальнейшие микроскопические исследования текстур формирующегося льда планируется проводить в направлении совершенствования методики их визуализации.



**Рис. 3.** Зависимость твёрдости от координаты точки измерений вдоль ледового бассейна:  
 1 – экспериментальная кривая; 2 – аппроксимация (модулирующая волна)

**Fig. 3.** The dependence of hardness on the coordinate of the measurement point along the ice pool:  
 1 – experimental curve; 2 – approximation (modulating wave)

Метод пенетрации оказался более «чувствительным» к формированию вторичных текстур, чем работа со шлифами в поляризованном свете.

Напряжения, возникающие при замораживании воды, вызывают локальные деформационные изменения структуры льда, сопровождающиеся излучением упругих волн. В результате возникают волновые структуры, которые, в свою очередь, формируют «замёрзшие волны» в ледяном поле. Комплексное воздействие этих факторов изменяет текстуру ледяного каркаса по всей его толщине и отражается в локальной неоднородности, проявляющейся в профилях макроскопических характеристик прочности льда, оцениваемой по его твёрдости. На этой стадии формирования ледяного поля внутренний источник излучения оказывает доминирующее влияние, что подтверждает кривая 2 на рис. 2.

Интервал значений локальной твёрдости моделированного льда зависит, при прочих равных условиях, от режима замораживания, толщины ледяного поля и температуры воздуха. Эти факторы в процессе экспериментов изменялись в небольшом интервале своих штатных значений, поэтому в настоящей статье не рассматриваются. Внимание было сосредоточено на закономерностях формирования стационарных периодических волновых структур. Выводы о влиянии

этих структур на локальную твёрдость моделированного льда подтвердились многочисленными измерениями локальной твёрдости в продольных профилях ледяного поля.

На рис. 3 представлена типичная экспериментальная зависимость локальной твёрдости от точки измерений для продольного профиля ледяного поля (кривая 1). Аналогичные качественные зависимости получены для продольных профилей с разным удалением от бортов бассейна. Осцилляции локальной твёрдости, полученные для продольного профиля (кривая 1 на рис. 3), как и в предыдущих сериях измерений (см. рис. 1 и 2), свидетельствуют об интерференции волн. Картина наблюдаемого явления связана главным образом с механизмом накопления дислокаций и увеличением их подвижности под действием переменных напряжений и скоростей в стоячей волне. Мерная база в продольном профиле составляла 65 м и содержала 125 точек измерений. Осцилляции локальной твёрдости происходят в интервале от 36 до 104 кПа. Такой же интервал осцилляций наблюдался в предыдущей серии измерений (кривая 1 на рис. 2).

При сравнении экспериментальных зависимостей локальной твёрдости в профилях вдоль и поперёк ледового бассейна установлено, что в обоих случаях они имеют вид периодических

функций, характерных для волнового процесса. Условно выделены масштабы периодических повторений экстремумов локальной твёрдости (2, 5 и 40 м). Пределы прочности льда, оцениваемой по его твёрдости, изменяются в близких пределах значений этой величины и зависят от толщины ледяного поля и температуры воздуха. Этим объясняются небольшие расхождения абсолютных значений локальной твёрдости для льда разных серий измерений (под серией измерений понимаются все измерения, выполненные для ледяного поля конкретной даты приготовления). Длина волны  $\lambda = 2$  м соответствует бегущей продольной волне, механизм генерации которой обусловлен, по-видимому, резонансными колебаниями вторичной текстуры ледяного поля, образовавшейся в результате метаморфизма льда. Колебания с длинами волн 5 и 40 м отвечают изгибно-гравитационным волнам. Значения этих длин волн обусловлены геометрией ледового бассейна.

Таким образом, осцилляции локальной твёрдости льда есть зеркальное отражение фазовой поверхности амплитуды (проекции скорости) стоячей волны. Для плоской стоячей волны амплитуда колебаний может быть вычислена по уравнению [11]

$$\chi = A_0 \cos(\pi m/a)x \cos(\pi n/b)y, \quad (5)$$

где  $m, n$  – число колебаний, которое укладывается соответственно по длине ледяного поля  $a = 80$  м и ширине бассейна  $b = 10$  м ( $m, n = 1, 2, 3... \infty; m = n \neq 0$ ).

Для рассматриваемого случая уравнение (5) записывается в следующем виде:

$$\chi = A_1 \cos(\pi m/a)x \cos(\pi n/b)y + A_2 \cos \pi x \cos \pi y, \quad (6)$$

где  $A_1$  и  $A_2$  – амплитуды складывающихся волн, определяются из эксперимента (см. рис. 1 и 3).

Модельное представление волновых структур в ледяном поле – уравнение (6) – качественно соответствует экспериментальным зависимостям его локальной твёрдости от координаты точки измерений (см. рис. 1–3). Из него следует, что *фазовая поверхность амплитуды стоячих волн в ледяном поле не монохромна*. Также не монохромна, по данным экспериментов, и поверхность локальной твёрдости ледяного поля. Следствие такой немонохромности – присутствие линий узловых точек на фазовой поверх-

ности амплитуд стоячих волн. По определению, эти линии должны быть расположены параллельно боковым стенкам бассейна и их координаты должны быть фиксированы. Это было бы возможно, если бы граница контакта была идеальная (жёсткая вертикальная гладкая стенка бассейна с коэффициентом отражения 100%), а условия на границе лёд–стенка были бы неизменными (адгезионный контакт стабилен, градиент температуры равен нулю). Практически всегда присутствует градиент температуры, как и отклонения от идеальных условий.

Так, для поперечного профиля (лёд приморожен к боковым стенкам бассейна) отношение волновых сопротивлений льда  $\rho_0 V_0$  и бетона  $\rho_k V_k$  равно 1,8 при коэффициенте отражения  $R_{0K} = 0,29$ . Для продольного профиля (один торец приморожен к стенке, другой контактирует с водой) эти величины также будут равны соответственно 1,8 и 0,29, а отношение волновых сопротивлений льда  $\rho_0 V_0$  и воды  $\rho_a V_a$  составит 2,5 при коэффициенте отражения  $R_{0A} = 0,43$ . Поэтому от свободного края ледяного поля в лёд будет отражаться на 14% больше упругой энергии волн. В связи с этим влияние волновых структур изначально будет другое, чем в поперечном профиле. Кроме того, толщина ледяных полей, в которых выполнялись серии измерений, изменялась от 40 до 53 мм. Если рассматривать эту связь линейной, то различия составят 26%. Все эти погрешности, казалось бы, не так велики, но суммарное их влияние может стать существенным. Отметим также, что ледяной покров в бассейне не идеален ни по толщине льда, ни по градиенту температур. Не исключено и влияние поглощения колебательной энергии, и её излучение ледяным полем. По этой причине колебательная скорость в узлах стоячих волн не будет достигать нуля.

Тем не менее, наблюдаемый эффект немонохромности заслуживает особого внимания как одна из особенностей формирования волновых структур и их влияния на прочностные свойства солёного льда. На практике выбор точки «нулевого отсчёта» – координаты узловых линий, как правило, содержит систематическую погрешность (свою для каждого профиля). Понятно, что сравнивать однородные экспериментальные величины можно только при условии полной идентичности условий. Поэтому приходит-

ся очень внимательно оценивать возможность традиционных сопоставлений так называемых «средних» значений прочностных характеристик ледяного поля.

Итак, в ледовом бассейне прямоугольной формы под воздействием комбинированных источников излучения волн создаётся квазистационарная периодическая волновая структура. Под совместным действием волновых полей и остаточных напряжений формируется вторичная текстура моделированного льда, а следовательно, изменяются его прочностная характеристика и динамическая твёрдость. Эффект от воздействий стоячих волн усиливается остаточными напряжениями, возникшими в процессе формирования ледяного поля, включая сжимающие (термические) напряжения со стороны боковых стенок бассейна. Собственные резонансные частоты ледяного поля определяются упругостью льда, его геометрией, вторичными текстурами и условиями на границе (обжатие на боковых стенках бассейна).

Эффект изменения прочности моделированного льда под действием волновых структур заслуживает дальнейшего исследования, прежде всего в плане возможного «переноса» результатов, полученных в бассейне, на природный лёд в условиях залегания. Однако различия прочностных и структурных характеристик моделированного и природного льда делают возможность такого переноса не вполне очевидной. Контролируемые условия формирования моделированного льда в бассейне, а также практически неограниченная возможность применения измерительной аппаратуры позволили достичь большей определённости в интерпретации экспериментальных результатов, чем это было бы возможно изначально в природном льде по месту залегания.

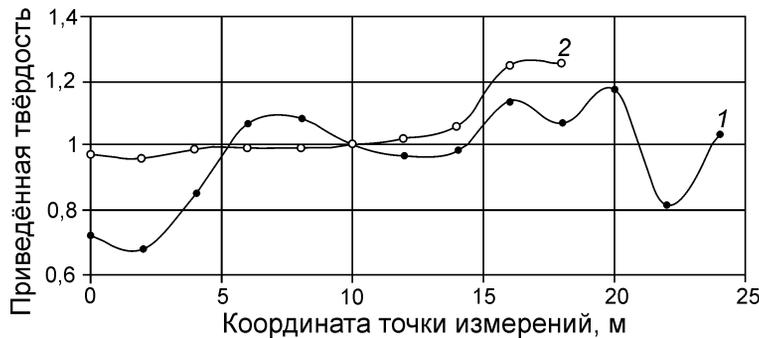
С учётом накопленного опыта разработанный подход был применён для исследования локальной твёрдости природного ледяного покрова на подмосковной реке Десне (55°30' с.ш. и 37°26' в.д.). Речной лёд в виде пластины толщиной 0,48 м с двумя слоями разной структуры имел типичное строение ледяного покрова пресных водоёмов [12]. Верхний слой мелкокристаллического льда толщиной 9 см и плотностью  $\rho = 887 \pm 5 \text{ кг/м}^3$  при  $-10 \text{ }^\circ\text{C}$  образован кристаллами со средним диаметром  $0,1 \div 0,2 \text{ см}$  с неболь-

шим количеством воздушных включений. Нижний прозрачный слой льда толщиной 39 см имел плотность  $\rho = 909 \pm 5 \text{ кг/м}^3$  и был образован кристаллами со средним диаметром 1–2 см длиной до 12 см. Температура воздуха во время измерений составляла  $-10 \text{ }^\circ\text{C}$ .

Локальная твёрдость природного льда определялась с помощью портативного пенетрометра [8], но в методику измерений были внесены изменения. Так, крестообразный наконечник был заменён на наконечник с шаровой рабочей поверхностью (радиус 40 мм). Максимальная осевая сила соударения увеличена до 650 Н за счёт повышения начальной скорости соударения с 0,8 до 2,3 м/с. Это позволило создать среднее контактное давление, при котором пластические деформации льда становятся доминирующими, а локальная твёрдость — достаточно чувствительной к его строению. Расчётная толщина льда, которая формирует «отклик» в виде деформационной зависимости «напряжение— время», составляет около 0,3 м, а время соударения — доли миллисекунды. Время очистки от снега локальной площадки, на которой выполнялись измерения, не превышало 10–15 с.

Измерения вели на площадках, расположенных через каждые 2 м поперёк и вдоль русла реки. Результаты измерений приведены на рис. 4 в виде зависимостей приведённой твёрдости  $\sigma_i/\sigma_{10м}$  от координаты измерений. За точку приведения выбрана твёрдость льда на площадке, удалённой от правого берега на 10 м (прямолинейный участок русла реки). Явно выраженная периодичность кривой 1 и отсутствие такой же периодичности на кривой 2 рис. 4 свидетельствуют о возможном воздействии на структуру речного льда стоячих волн, возникающих между берегами реки. Наблюдаемые отклонения (кривая 1) от точки приведения превышают 30%, тогда как относительная ошибка измерений твёрдости однородного материала составляет не более 1%.

Из рис. 4 видно, что наибольшая пространственная изменчивость твёрдости льда наблюдается поперёк русла реки (кривая 1), особенно вблизи припая, а меньшая — вдоль её русла (кривая 2). Это не противоречит условию образования стоячих волн в речном льде. В рассматриваемом случае берега реки служат не только отражателем волн, но и препятствием,



**Рис. 4.** Зависимость локальной твёрдости речного покрова от координаты точки измерений:

1 – поперёк русла реки; 2 – вдоль русла реки

**Fig. 4.** The dependence of the local hardness of the river cover on the coordinate of the measurement point:

1 – across the river bed; 2 – along the river bed

способствующим возникновению термических напряжений. Так, при суточных колебаниях температуры, особенно при резком ночном похолодании, речной покров прогибается вниз, а при резком потеплении – вверх. Берега при этом играют роль бокового ограничителя. Термические напряжения и разные условия контакта ледяного поля с левым и правым берегами реки несколько усложняют картину, но эффект периодического изменения локальной твёрдости всё ещё остаётся достаточно чётко выраженным. Отметим, что закономерности формирования периодических волновых структур в речном ледяном покрове (длины волн метрового диапазона) те же самые, что и в моделированном льде. В обоих случаях их образование обусловлено формой и габаритами ледяного поля, отношением волновых сопротивлений льда и грунта, геометрией ледяного поля и неровностью берегов реки (размер и наклон поверхности контакта льда с грунтом). Таким образом, полевые измерения динамической локальной твёрдости в поперечном профиле речного ледяного покрова (природный лёд) качественно подтвердили результаты, полученные в ледовом бассейне на моделированном льде.

Образование в ледяном покрове вторичных текстур льда с уменьшенной прочностью объясняется накоплением деформационных дефектов. Для количественной оценки размеров подвижных элементов ледяного каркаса были использованы акустические спектры, генерируемые при его контактном разрушении. Связь между микро- и макросвойствами льда устанавливалась с помощью линейной модели, состоя-

щей из  $n$  (двух или более) идентичных материальных точек, имеющих одинаковую массу  $m$  и соединённых упругими связями одинаковой жёсткости  $k$  [5]. Для определения эффективных размеров подвижных элементов строения моделированного льда использован амплитудно-частотный анализ, основанный на точном решении дифференциального уравнения (модель гармонического осциллятора). Эффективные размеры  $R$  подвижных элементов льда определялись по формуле [5]

$$R = (k / (16\pi^3 f^2 \rho_0))^{1/3}. \quad (7)$$

Подставляя в уравнение (7) значения плотности кристаллической решётки льда  $\rho_0 = 916,8 \text{ кг/м}^3$ , жёсткости связи  $k = 56 \text{ Н/м}$  и частоты для первого  $f_1 = 2,7 \text{ Гц}$  и последующего максимума  $f_2 = 2616 \text{ Гц}$ , получаем следующие значения характерных размеров текстуры ледяного поля:  $R_1 = 26 \text{ мм}$  и  $R_2 = 0,25 \text{ мм}$ . Рассчитанные таким образом размеры совпадают с толщиной ледяного поля (52 мм) и диаметром (~0,5 мм) ледяных гранул, которые образуются при замораживании распыляемой воды в переходной атмосфере ледового бассейна.

Исследуемый тип льда называется мелкозернистым (FG) моделированным льдом [13], который нарастает ламинирующими слоями над поверхностью воды в ледовом бассейне. Структура этого льда определялась по шлифам до проведения измерений и в процессе контактного разрушения (при пенетрации) по акустическим спектрам. Верификация модели в рабочем диапазоне от 2 Гц до 20 кГц устанавливалась сопоставлением значений рассчитанных эффективных раз-

меров осцилляторов с экспериментально определёнными размерами кристаллов льда. Данные анализа акустических спектров контактного разрушения льда использовались для контроля процессов формирования ледяного поля в ледовом бассейне и динамики движения корпусов судов в моделированном льде [14]. Результаты исследований можно использовать для определения пространственно-временной неоднородности любых других ледяных полей, а также для дистанционного изучения контактного разрушения льда, включая взаимодействие придонного льда с ложем ледников.

### Обсуждение результатов

Исследована пространственно-временная изменчивость локальной твёрдости солёного льда в ледяном поле динамического типа формирования. Установлена повторяемость значений локальной твёрдости как функции координат точек измерения в продольных и поперечных профилях ледяного поля. Экспериментальные зависимости твёрдости как функции координат имеют вид стационарных периодических волновых структур. Этот факт послужил основанием рассматривать осцилляции значений локальной твёрдости как результат формирования вторичных текстур льда (динамический метаморфизм) в узлах и пучностях стоячих волн в ледяном поле. Индикаторами волновых процессов стали вторичные текстуры льда, которые количественно определяли по значениям локальной твёрдости. Полученные закономерности в виде периодических зависимостей локальной твёрдости ледяного поля отражают влияние волновых процессов на прочность солёного льда. Фактически разработан метод исследования волновых структур в ледяном поле, лежащем на гидравлическом основании.

В интерпретации экспериментальных результатов использованы известные факты: излучение акустических волн при фазовом переходе (замораживании воды) [10]; возникновение остаточных напряжений при послойном замораживании льда [15]; формирование вторичных текстур льда с пониженной динамической вязкостью и, следовательно, прочностью под действием импульсов напряжений [5]. По экс-

периментальным данным определены длины бегущих волн, построена фазовая поверхность волновых структур, а также оценены размеры подвижных элементов структуры льда. Полученные данные сопоставлены с теоретически рассчитанными их значениями. Непротиворечивость полученных результатов данным и выводам других исследователей позволяет рассматривать влияние волн на формирование вторичных структур льда как один из факторов пространственно-временной неоднородности прочностных свойств ледяных полей.

На волновой характер пластических деформаций впервые обратил внимание А.В. МакРейнольдс [16], который исследовал прерывистую неоднородную пластическую деформацию поликристаллов с помощью метода дифракционной решётки. Дж.Ф. Белл [17] продолжил эти исследования, используя метод акустической эмиссии. Генерация импульсов напряжений при пластической деформации остаётся объектом исследования и в настоящее время как фактор воздействия на пластическое течение льда [18]. Однако действие акустических волн на пластичность льда всё ещё исследовано недостаточно. Перспективность таких исследований показана на примере влияния расходящихся и сходящихся фронтов импульсов напряжений на структуру льда в ограниченном объёме (сопло Лавая) [5, 14].

В настоящей работе формирование волновых структур и их влияние на прочность льда исследовались в ледяном поле солёного льда площадью 800 м<sup>2</sup>. Измерения локальной твёрдости в различные промежутки формирования ледяного поля подтвердили, что основным источником упругих колебаний может быть когерентное излучение упругих волн при замораживании воды, т.е. само ледяное поле. Энергии этого излучения оказалось достаточно для образования вторичных текстур льда при наличии остаточных напряжений, возникающих в случае послойного намораживания ледяного поля. Достоверность формирования волновых текстур в условиях естественного залегания проверена на речном льде толщиной 0,49 м (подмосковная р. Десна).

Влияние волновых структур на прочностные и реологические свойства льда может быть прослежено при решении задач контактной механики разрушения льда. Ключевой момент здесь — понимание волновых процессов, происходящих

в ледяных полях, и условий, определяющих формирование волновых структур и прочностные характеристики промежуточных слоёв. Разработанная методика полевых испытаний и реализующая этот подход измерительная аппаратура позволяют выполнять исследования ледяных и снежных полей как для научных целей, так и для практических приложений.

### Заключение

Настоящая публикация — завершающая часть цикла работ, посвящённых решению фундаментальной проблемы гляциологии о количественной связи микроструктуры льда с его макроскопическими свойствами, а именно: нелинейным волновым процессам во льду и их влиянию на формирование вторичных текстур в природном льде. Исследуемые механизмы позволяют понять, как и почему происходят подвижки ледников, чем объясняется пространственно-временная неоднородность ледяных и снежных покровов, а также наметить пути к изучению механики контактного разрушения льда в придонных слоях ледников. Как всякая замкнутая задача, она имеет реальные практические приложения уже на данном этапе решения, например, совершенствование методик, связанных с испытанием моделей судов и ледостойких сооружений в ледовом бассейне в зависимости от условий на фрикционном контакте, параметров движения модели, а также физико-механических и прочностных свойств льда.

Долгое время в экспериментальной механике движения больших и малых объёмов льда игнорировалось влияние нелинейных волновых процессов. Рассматривались в основном линейные процессы и соответствующие им дифференциальные уравнения, которые не отражали фундаментальных свойств реального льда (механика ледников Паундера и многочисленные современные модели). Наконец наступил критический момент, когда не в зарубежных, а в отечественных журналах был опубликован ряд статей, открывающих новое направление исследований в современной гляциологии. Было исследовано также влияние волновых процессов на прочность природного льда в частично замкнутых объёмах. Волновой метаморфизм льда рассматривается

в качестве одной из причин пространственно-временной изменчивости текстуры, а следовательно, и прочностных свойств ледяных полей. С этой целью была измерена локальная твёрдость ледяного поля динамического типа формирования площадью  $800 \text{ м}^2$ , лежащего на поверхности жидкости в бассейне прямоугольной формы и примороженного с трёх сторон к его бортам. Экспериментальные зависимости локальной твёрдости как функции координат точек измерения в продольных и поперечных профилях имеют вид стационарных периодических волновых структур. Осцилляции твёрдости составляют от 40 до 60% при погрешности измерений 5–7%.

Установлено, что стационарные периодические волновые структуры в ледяном поле формируются в результате интерференции изгибно-гравитационных и продольных волн. Подтверждён волновой механизм метаморфизма солёного льда. Рассчитаны фазовые скорости. Получено соответствие теории и эксперимента. Волновой динамический метаморфизм реализуется при смешанном типе возбуждения. Доминирующий источник упругих волн в ледяном поле при отсутствии внешних воздействий (промышленные или сейсмические вибрации) — когерентное излучение в самом льде.

Дополнительные исследования динамической локальной твёрдости в речном ледяном покрове подтвердили формирование аналогичных стационарных периодических волновых структур в природном льде. Количественно определено влияние волновых структур на прочностные свойства ледяного поля как одного из возможных факторов пространственно-временной изменчивости льда в условиях залегания. Полученные результаты могут быть использованы при определении ледовых нагрузок на плавучие и стационарные морские платформы, при разработке эффективных технологий проектирования корпусов ледоколов и судов ледового плавания, а также для понимания движения льда в придонных слоях ледников.

**Благодарности.** Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 20-01-00649\_a).

**Acknowledgments.** This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research, project № 20-01-00649\_a.

## Литература

## References

1. Хейсин Д.Е. Динамика ледяного покрова // Механика и физика ледяного покрова. М: Наука, 1983. С. 152–163.
1. *Kheysin D.Ye.* Ice cover dynamics. *Mekhanika i fizika ledyanogo pokrova*. Mechanics and physics of ice cover. M: Nauka, 1983: 152–163. [In Russian].
2. Букатов А.Е. Волны сжатия в ледяном покрове // Волновые движения жидкости: теория и эксперименты. Геофизика. 1985. № 10. С. 24–32.
2. *Bukatov A.Ye.* Compression waves in ice cover. *Volnovyye dvizheniya zhidkosti: teoriya i eksperimenty*. Wave motion of a fluid: theory and experiments. Geofizika. 1985, 10: 24–32. [In Russian].
3. Гаврило В.Л., Трипольников В.П. Результаты исследования изгибно-гравитационного резонанса в морских льдах // Теория и прочность ледокольного корабля. Горький: Изд-во ГПИ, 1982. С. 28–34.
3. *Gavrilo V.L., Tripol'nikov V.P.* The results of the study of flexural-gravitational resonance in sea ice. *Teoriya i prochnost' ledokol'nogo korablya*. The theory and strength of an icebreaker ship. Gor'kiy: GPI, 1982: 28–34. [In Russian].
4. Козин В.М. Резонансный метод разрушения ледяного покрова. Изобретения и эксперименты. М.: Академия естествознания, 2007. 355 с.
4. *Kozin V.M.* *Rezonansnyy metod razrusheniya ledyanogo pokrova. Izobreteniya i eksperimenty*. Resonant destruction method. Inventions and experiment. M.: Akademiya Yestestvoznaniya. 2007: 355 p. [In Russian].
5. Епифанов В.П. Влияние импульсов напряжений на структуру льда в промежуточном слое // ДАН. 2018. Т. 479. № 6. С. 629–633.
5. *Epifanov V.P.* The effect of stress pulses on the structure of ice in the intermediate layer. *Doklady Akademii Nauk*. Reports of the Academy of Sciences. 2018, 479 (6): 629–633. [In Russian].
6. Денисов В.И., Сазонов К.Е., Тимофеев О.Я. Новые экспериментальные возможности Крыловского государственного научного центра по изучению ледовых воздействий на объекты морской техники. // Арктика: экология и экономика. 2015. № 3 (19). С. 76–81.
6. *Denisov V. I., Sazonov K. E., Timofeev O. Ya.* New experimental capabilities of the Krylov State Scientific Center for the study of ice impacts on objects of marine technology. *Arktika: ekologiya i ekonomika*. Artika: ecology and economics. 2015, 3 (19): 76–81. [In Russian].
7. Черепанов Н.В. Классификация льдов природных водоёмов // Тр. ААНИИ. 1976. Т. 331. С. 77–99.
7. *Cherepanov N.V.* Classification of ice in natural reservoirs. *Trudy Instituta Arktiki i Antarktiki*. Proc. of AARI. 1976, 331: 77–99. [In Russian].
8. Епифанов В.П. Влияние естественных факторов на морфологию снежного покрова // Вестн. Кольского науч. центра РАН. 2018. № 3 (10). С. 155–162.
8. *Epifanov V.P.* The influence of natural factors on the morphology of snow cover. *Vestnik Kol'skogo nauchnogo tsentra RAN*. Bulletin of the Kola Science Center RAS. 2018, 3 (10): 155–162. [In Russian].
9. Хейсин Д.Е. К задаче упруго-пластического изгиба ледяного покрова // Тр. ААНИИ. 1964. Т. 267. С. 143–149.
9. *Kheysin D.Ye.* To the problem of elastic-plastic bending of the ice cover. *Trudy Instituta Arktiki i Antarktiki*. Proc. of AARI. 1964, 267: 143–149. [In Russian].
10. Епифанов В.П., Нестеров С.В. Электромагнитная эмиссия как метод количественных исследований пластической деформации льда // Процессы в геосредах. 2019. № 4 (22). С. 480–489.
10. *Epifanov V.P. Nesterov S.V.* Electromagnetic emission as a method of quantitative studies of ice plastic deformation. *Protsessy v geosredakh*. Processes in geomedia. 2019, 4 (22): 480–489. [In Russian].
11. Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Главная редакция физико-математической литературы Изд-ва «Наука», 1977. 816 с.
11. *Sretenskiy L.N.* *Teoriya volnovykh dvizheniy zhidkosti*. Theory of wave motion of a liquid. M.: Nauka, 1977: 816 p. [In Russian]
12. Савельев Б.А. Строение и состав природных льдов. М.: Изд-во МГУ, 1980. 280 с.
12. *Savel'yev B.A.* *Stroyeniye i sostav prirodnykh l'dov*. The structure and composition of natural ice. M.: MGU, 1980: 280 p. [In Russian].
13. Von Bock und Polach R.U.F., Franz R. U., Ettemab R., Gralhera S., Kellnera L. Stendera M. The non-linear behavior of aqueous model ice in downward flexure // Cold Regions Science and Technology. 2019. 36 (1–3). P. 47–70. doi.org/10.1016/j.coldregions.
13. *Von Bock und Polach R.U.F., Franz R. U., Ettemab R., Gralhera S., Kellnera L. Stendera M.* The non-linear behavior of aqueous model ice in downward flexure. *Cold Regions Science and Technology*. 2019, 36 (1–3): 47–70. doi.org/10.1016/j.coldregions.
14. Епифанов В.П., Сазонов К.Е. Влияние стоячих волн на локальную прочность ледяного поля // ДАН. 2019. Т. 489. № 6. С. 30–35.
14. *Epifanov V.P., Sazonov K.Ye.* The influence of standing waves on the local strength of the ice field. *Doklady Akademii Nauk*. Reports of the Academy of Sciences. 2019, 489 (6): 30–35. [In Russian].

15. Манжиров А.В., Лычёв С.А. Математическая теория растущих тел при конечных деформациях // ДАН. 2012. Т. 443. № 9. С. 438–441.
16. McReynolds A.W. Plastic deformation waves in aluminum. Transactions of the American Institute of Mining and Metallurgical Engineers. 1949. V. 185. P. 32–45.
17. Белл Дж.Ф. Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел. Ч. 2. М.: Наука, 1984. 431 с.
18. Зуев Л.Б. Автоволновая модель пластического течения // Физическая мезомеханика. 2011. Т. 14. № 3. С. 85–94.
15. Manzhirov A.V., Lychov S.A. The mathematical theory of growing bodies at finite strains. *Doklady Akademii Nauk*. Reports of the Academy of Sciences. 2012, 443 (9): 438–441. [In Russian].
16. McReynolds A.W. Plastic deformation waves in aluminum. Transactions of the American Institute of Mining and Metallurgical Engineers. 1949, 185: 32–45.
17. Bell Dzh.F. *Eksperimental'nye osnovy mekhaniki deformiruemyykh tverdykh tel. CH. 2*. Experimental fundamentals of the mechanics of deformable solids. Part 2. М.: Nauka, 1984: 431 p. [In Russian].
18. Zuyev L.B. Autowave model of plastic flow. *Fizicheskaya Mezomekhanika*. Physical Mesomechanics. 2011, 14 (3): 85–94. [In Russian].