

Морские, речные и озёрные льды

УДК 556.535.5

doi: 10.31857/S2076673420010028

Моделирование заторов льда в руслах рек (обзор)

© 2020 г. А.С. Тарасов

Национальный исследовательский Томский государственный университет, Томск, Россия
alsetar@yandex.ru

Modeling of ice dams in riverbeds (overview)

A.S. Tarasov

National Research Tomsk State University, Tomsk, Russia
alsetar@yandex.ru

Received May 6, 2019 / Revised June 21, 2019 / Accepted September 19, 2019

Keywords: *ice jams, physical, mathematical and computer modeling, river ice processes.*

Summary

The paper gives an overview of the main publications on the subjects of modeling of ice jams in riverbeds with an emphasis on the experience abroad. Different approaches to modeling of ice jams in rivers are considered conceptually together with a wide range of problems which are solved by means of the modeling. The most successful countries and scientific groups in this area of studies are identified and presented in the article. The most-used computer models were determined, and characteristics of them were investigated. When reviewing, the comparative-descriptive method was used. The list of leading publications on the above subjects was analyzed. Relevant literature was selected using the citation databases – RSCI (Russian Science Citation Index), Scopus and Web of Science. Final results of the work are as follows: a wide range of scientific publications on the subjects of the ice jam modeling published for the last 18 years (1999–2017) had been considered. The geography of publications extends from North America up to Eurasia and Japanese islands. A comparative table of the most commonly used computer models together with characteristics of them had been constructed. The most promising areas of development in the field of modeling of the ice jams are shown.

Citation: Tarasov A.S. Modeling of ice dams in riverbeds (overview). *Led i Sneg*. Ice and Snow. 2020. 60 (1): 121–133. [In Russian]. doi: 10.31857/S2076673420010028.

Поступила 6 мая 2019 г. / После доработки 21 июня 2019 г. / Принята к печати 19 сентября 2019 г.

Ключевые слова: *заторы льда, ледовые процессы на реках, физическое, математическое и компьютерное моделирование.*

Обзор публикаций по проблеме моделирования заторов льда и ледовых процессов на реках показывает важность физического, математического и компьютерного моделирования заторов. Наибольшие преимущества имеет компьютерное моделирование, которое, кроме научного анализа, позволяет представить доступные инструменты анализа организациям, ответственным за принятие решений по предотвращению негативных последствий заторообразования.

Заторы льда — распространённое явление на многих реках с регулярным и устойчивым в зимнее время ледяным покровом, протекающих по территориям с выраженной сменой времён года. Формирование затора льда приводит к резкому росту уровня воды выше тела затора, что может вызвать затопление окрестных земель и причинить ущерб находящимся там жилым и хозяйственным постройкам, а в особо опасных случаях — угрожать здоровью и жизни населения. Всё это требует всестороннего изучения ледяных заторов, разработ-

ки методов их предупреждения и регулирования, прогноза возникновения, протекания и разрушения, а также оценки их негативных последствий.

Ледяные заторы наблюдаются, как правило, весной, продолжаются недолго и носят динамичный характер. Их изучение наиболее перспективно с помощью моделирования. В настоящей работе путём сравнительного анализа основных научных публикаций рассматриваются методы и инструменты, применяемые для моделирования заторов льда.

Подходы к моделированию заторов льда

Применительно к проблеме моделирования заторов льда можно выделить три подхода, имеющих характерные особенности.

1. *Физическое моделирование* подразумевает построение физически осязаемой модели участка как одно-, так и многорукавного русла реки. Внутри физического моделирования можно выделить модели подобия, когда искусственно конструируется речное русло, повторяющее очертания русла реальной реки со всеми прилегающими территориями [1], и моделирование в гидравлических лотках, имеющих, как правило, прямолинейную форму с прямоугольным поперечным сечением [2–4].

2. *Математическое моделирование* — самый разнообразный по методам реализации подход [5]. Впрочем, оно включает в себя не столь большое число детерминированных моделей, которые представлены и в строгом аналитическом (в меньшей степени), и в численном виде (наиболее распространены) [6–10]. На практике чаще встречаются стохастические модели. В последнее время, по мере накопления объёма исходных данных для моделирования, всё большую популярность приобретают нейронные сети и методы машинного обучения [11–13]. Осваиваются и не очень распространённые приёмы, среди которых — теория распознавания образов [14], теория серых систем [12], нечёткая логика [13, 15], а также создаются комбинированные модели, основанные сразу на нескольких принципах [11–13, 16–18].

3. *Компьютерное моделирование* использует зарекомендовавшие себя на практике численные модели в виде программного обеспечения с графическим пользовательским интерфейсом. К основным преимуществам таких моделей относятся: удобство и скорость работы с моделью; наглядность и интерпретируемость результатов моделирования; встроенная, как правило, ГИС или наличие возможности экспортировать результаты моделирования для дальнейшего их представления в ГИС. Существует достаточно много компьютерных моделей, как коммерческих, так и свободно распространяемых, и ввиду их растущей популярности уже предпринимались попытки сравнить наиболее распространённые модели между собой для определения качества воспроизведения ими ледовых ситу-

аций [19, 20]. Кроме того, с целью изучения воздействия ледяных заторов на водный поток применяют и модели, изначально для этого не предназначенные [21].

Физическое моделирование заторов льда

Физическое моделирование можно разделить на моделирование в гидравлических лотках и пространственное (масштабное) моделирование. При этом каждая разновидность физического моделирования способна учитывать и не учитывать характеристики прочности льда (в специальных ледотермических лабораториях) [1]. Моделируются, как правило, два вида наиболее распространённых и вместе с тем наиболее опасных заторов — заторы подныривания и заторы торошения, простирающиеся по всей ширине реки. Пристальное внимание уделяется выбору материала, имитирующего лёд, поскольку в большей степени именно от него будет зависеть адекватность воспроизведения заторного явления.

Несмотря на то, что исторически первыми были попытки теоретического осмысления заторных процессов путём наблюдения заторных явлений в природе, применение на практике нашло именно лабораторное физическое моделирование, а уже позднее подключились и математические методы. Широкое распространение физического моделирования на начальном этапе исследования заторных явлений обусловлено рядом преимуществ. Прежде всего, многие характеристики заторов плохо поддаются инструментальным измерениям и наблюдениям в естественных условиях из-за невозможности использования существующих инструментов по соображениям техники безопасности, а также из-за высокой интенсивности процессов, подлежащих измерению. Вместе с тем численные математические модели заторов льда на сегодняшний день развиты недостаточно, чтобы давать сопоставимые или даже лучшие по точности результаты, чем физические модели.

Хотя в период 1970–90-х годов физические модели давали правдоподобные результаты [22], сегодня приходится от них отказываться в пользу численных моделей по двум причинам. Во-первых, современные численные модели во многом вобрали в себя улучшенное понимание

физики заторного процесса и дают хорошие результаты при точной калибровке и предварительном тестировании этих моделей на наборах данных, характерных для различных полевых условий; во-вторых, численные модели значительно дешевле. Важность лабораторного моделирования заторов льда связана с недостатком количественных данных, описывающих их динамику и необходимых для верификации вычислительных моделей [2]. Количественная информация, описывающая изменение расхода воды, толщины затора, уровня воды и продвижение ледяного покрова в ходе лабораторного моделирования, как раз и предоставляет те недостающие данные, которые характеризуют динамику формирования затора. Важная роль отводится лабораторному моделированию заторов из-за высокой степени зарегулированности многих рек и невозможности документирования значительных изменений условий потока в естественной среде [3].

Лабораторное моделирование необходимо для дополнения и расширения знаний, полученных в ходе полевых исследований. Именно в лабораторных условиях было показано, что (хотя процессы образования затора носят динамический характер, а мощность затора, возникшего при таких условиях, имеет тенденцию быть немного меньше, чем при установившемся потоке) формирование затора и конечная толщина ледяных масс достаточно хорошо описываются теорией установившегося потока [2, 3]. Кроме того, в ходе лабораторных исследований было установлено, что скорость потока и интенсивность турбулентности вдоль потока меняются в зависимости от местоположения под затором [4]. Таким образом, лабораторные исследования и экспериментальная работа с гидравлическими моделями способствуют улучшению нашего понимания потока под затором льда, а также служат материалом для проверки последующих численных моделей заторов.

Главное препятствие на пути физического лабораторного моделирования — сложность воспроизведения физических свойств льда (исключение касается ледотермических лабораторий, где используется собственно лёд, однако они чрезвычайно редки). К этому добавим высокую сложность построения масштабных моделей, их дороговизну и большое количество времени, необходимое для их реализации. Лабораторное мо-

делирование, кроме того, связано с серьёзными трудностями ввиду невозможности выполнить все критерии подобия одновременно [7].

Математическое моделирование заторов льда

В математических моделях заторов, как правило, принимается факт отсутствия ледостава ниже очага затора [23], что наблюдается не так уж часто. Отметим, что наиболее опасны как раз заторы со сплошным ледоставом ниже мест их образования. При этом из-за сложности и многофакторности явления модели дают в основном приближённые решения в одномерной формулировке, а массы льда для упрощения рассматриваются как сыпучая среда. В основе большинства математических моделей заторов лежит уравнение баланса между силами, стремящимися привести заторные массы в движение, и силами, препятствующими этому. Со стороны первых — давление потока воды и приплывающих сверху по течению льдин, проекция веса скоплений льда на направление потока, трение воды о нижнюю поверхность льда, а со стороны вторых — трение льдин друг о друга и о берега. Таким образом, чтобы судить о возможности или невозможности формирования затора на определённом участке реки, помимо информации о ледовой обстановке и характеристиках льда, достаточно знать такие гидрометрические характеристики, как глубину, ширину и уклон реки на этом участке.

Выделяют модели заторов на узких (ширина реки меньше десяти линейных размеров льдин) реках, где преобладает процесс подныривания, и на широких (ширина реки больше десяти линейных размеров льдин) реках, где преобладает процесс торошения. Модели заторов на широких реках встречаются чаще и, помимо уравнения баланса сил, действующих на скопления льда, включают в себя уравнения гидравлики потока подо льдом и баланса объёма льда.

Отмечается, что практически все методы количественной оценки заторов льда основаны на анализе осреднённых по сечению характеристик, что упрощает процесс моделирования, но сужает область применения этих моделей [6]. Так, одномерное моделирование позволяет решать задачи, учитывающие только принципиальное разли-

чие подлёдного и открытого потоков — наличие дополнительного сопротивления. Неоспоримое преимущество математического моделирования состоит в том, что, в отличие от других методов, математические модели дают достаточно общие оценки для широкого класса водных объектов. Это позволяет в некоторой степени решить проблему переносимости моделей.

Помимо моделирования собственно затора льда, перед исследователями стоит даже более значимая с практической точки зрения задача моделирования заторных уровней воды. Для её решения чаще всего применяют уравнения Сен-Венана, описывающие состояние потока при неустановившемся движении воды. Однако и здесь приходится допускать некоторые упрощения: так, уклон водной поверхности принимается равным уклону дна ввиду нехватки полевых наблюдений в период вскрытия реки, формирования и разрушения затора.

Среди всего многообразия математических моделей существуют и довольно простые, способные описывать какое-либо отдельно взятое ледовое явление, и довольно сложные, описывающие весь ледовый режим и принимающие во внимание десятки внешних факторов. В связи с этим встаёт вопрос о целесообразности применения модели к задаче определённой сложности [10]. Как и в случае с физическим лабораторным моделированием, в математическом моделировании заторов большинство моделей носят стационарный характер, но при этом они описывают состояние потока в русле на момент максимального развития (прорыва) затора. Основное же различие большинства существующих математических моделей заторов заключается, как правило, в способе задания параметров модели, начальных и граничных условий. В основном модели, описывающие распределение толщины льда в заторе, рассматривают распределение льда в русле в продольном направлении. Параметры, влияющие на распределение толщины заторных масс в поперечном направлении, анализируются заметно реже [9]. Один из самых сложных — вопрос о структуре потока под телом затора, в частности, описание турбулентности потока под затором. Чтобы ответить на этот вопрос, разрабатываются модели турбулентности потока под скоплениями льда, которые позже проверяются лабораторными экспериментами [8].

Ввиду растущего разнообразия математических методов моделирования заторов льда периодически возникает необходимость их сравнения, например, когда встаёт вопрос о выборе метода применительно к определённой задаче. Так, выполнено сравнение метода обратного распространяющихся нейронных сетей (BP-NN), метода опорных векторов (SVM) и метода множественной регрессии (MVRE) применительно к задаче прогнозирования толщины затора и уровня воды при заторе [11]. Моделирование с использованием методов BP-NN и SVM показало значительно лучшие результаты по сравнению с MVRE, что делает эти два метода более перспективными для прогнозирования мощности затора и величины заторных уровней воды.

Отдельно отметим ряд моделей, представляющих собой непопулярные решения. Такие модели строятся либо с использованием аппарата слабых моделей (ввиду относительной новизны) областей математики, либо представляют собой комбинации нескольких моделей сразу. Одна из таких моделей — динамико-стохастическая модель ледохода, в которой каждая льдина рассматривается как отдельный элемент совокупности свободно плавающих материальных тел конечных размеров [16]. При этом для каждой льдины отдельно рассматривается набор действующих на неё сил. Замечено, что отказ от модели сплошной среды в пользу модели дискретных элементов позволяет точнее воспроизводить параметры ледохода.

Для ретроспективного анализа частоты и мощности ледяных заторов можно использовать модель дерева классификации [24]. Явления заторов льда, восстановленные по годовым кольцам деревьев, преобразовываются в двоичные переменные. Построение классификационных деревьев позволяет определить иерархию переменных, входящих в модель, а также граничные условия формирования затора. Было показано, что по существенным корреляциям с воспроизведёнными метками ото льда весенний расход воды — важный фактор, но далеко не все случаи возникновения заторов льда он объясняет в достаточной мере. Хотя классификационные деревья, полученные по относительно точно составленным гидрологическим и климатическим прогнозам, вполне применимы для моделирования. Лучшие результаты достигаются при со-

вместном использовании гидрологических и климатических переменных. Это подтверждает, что заторы — сложные и многофакторные процессы.

Несмотря на нередкие весенние заторные наводнения, ощущается недостаток данных, необходимых для разработки прогностических моделей [13]. Кроме того, крайне желательна возможность переноса модели с одного бассейна, на данных которого она была построена, на другой, где планируется её применение. Однако пока такой возможности нет из-за ряда ограничений в переносе моделей на отличные от первоначальных условия: пространственно-временные ограничения (возможность применения модели, испытанной в определённом месте и в определённое время, в другом месте и в другое время необходимо тщательно обосновывать); ограничения, вызванные изменением начальных условий (изменения параметров русла и водосбора, например дноуглубительные работы, строительство гидротехнических сооружений, распашка или облесение поймы, приведут к необходимости перестройки модели).

Для преодоления этих ограничений изучена возможность применения программных вычислительных методов, основанных на нечётких и нейро-нечётких модельных технических приёмах, к моделированию весеннего вскрытия речного льда с целью оценки переносимости моделей между различными бассейнами и при разных сценариях изменения климата. При совмещении с нечёткой логикой в форме нейро-нечётких моделей логика модели может быть перенесена в другое место.

При рассмотрении нечётких экспертных систем с целью изучения их потенциала для разработки долгосрочных прогнозов риска заторов показано, что эти системы — перспективный инструмент для долгосрочного прогнозирования заторных наводнений [15]. Нечёткие экспертные системы выдают результат, основываясь на логических лингвистических правилах вместо исторических данных, что позволяет этому типу моделирования быть менее зависимым от объёма данных в отличие от многих статистических методов. Однако следует быть предельно внимательным, поскольку при разработке нечётких экспертных систем, особенно функции принадлежности, необходимо глубокое понимание предмета моделирования. В результате истори-

ческие данные и экспертная оценка часто совмещаются, чтобы определить функцию принадлежности и правила.

Ввиду многофакторности заторного процесса и вытекающих неопределённостей в процессе обработки данных при оценке риска ущерба, вызванного затором, который представляет собой сложную инженерную систему, распространённые методы оценки риска уже не могут применяться напрямую [12]. Необходимо разрабатывать новые методы оценки риска, среди которых — серое оценивание, основанное на теории серых систем. Модель серого оценивания способна эффективно решать однослойные и многоиндикаторные проблемы принятия решений. Однако практические проблемы в естественной среде сложнее, и, кроме того, из-за неопределённости условий оценивания оценщик редко может получить определённые значения меры воздействия и весов индикаторов. По этой причине, чтобы оценить риск заторных разрушений, используется интервал серых чисел.

Другой способ борьбы с недостаточностью и недоступностью данных для моделирования состоит в применении теории распознавания образов к проблеме выявления и прогнозирования ледового заторообразования. Прогноз в данном случае носит сценарный характер, выбранный год относится к одному из сценариев развития ледохода и заторообразования [14]. Такой сценарный прогноз наличия или отсутствия затора позволяет правильно планировать защитные мероприятия перед началом половодья.

Математические модели, разработанные в последние десятилетия, не только помогли улучшить понимание физических процессов речного льда в дополнение к полевым и лабораторным исследованиям, но и предоставили инструменты для планирования и инженерного проектирования [5]. При этом наблюдается дифференциация на «компонентные» модели, которые работают с отдельно взятыми ледовыми явлениями, и на «целостные» модели, которые рассматривают ледовые процессы комплексно. Несмотря на значительные достижения в математическом моделировании ледовых процессов, остаётся ряд слабых звеньев, над которыми предстоит работать в ближайшем будущем, среди них — эволюция льда от первых ледовых явлений до начала осеннего ледохода, процесс формирования донного льда, а также моделирование

Некоторые наиболее распространённые компьютерные модели, способные моделировать заторы льда в руслах рек

Название	Авторы	Доступность	Назначение	Размерность	В основе программы	Web-ссылка
CRISSP	<i>L. Liu, H. Li, H. T. Shen</i> – Университет Кларксон (США)	Коммерческая	Комплексное моделирование процессов речного льда	1D, 2D	Гидравлическая модель одномерного неустановившегося потока; гидродинамическая модель, дающая конечно-элементное решение двухмерного неустановившегося потока	ceati.com/crissp
HEC-RAS	<i>G. Brunner, M. Jensen, S. Piper, and others</i> – Инженерный корпус армии США	Бесплатная	Комплексное моделирование речной гидравлики	1D, 2D	Модули для расчёта кривой свободной поверхности при установившемся и неустановившемся режимах потока для расчёта транспорта наносов, анализа качества воды	hec.usace.army.mil/software/hecras
MIKE11	Консалтинговая фирма DHI (Дания)	Коммерческая	Моделирование рек и каналов	1D	Моделирование потока и уровня воды, качества воды, транспорта наносов, пойм, каналов, водохранилищ и других областей внутреннего стока	mikepoweredbydhi.com/products/mike-11
River1D/2D	<i>F. Hicks, A. Ghanem, J. Sandelin, and others</i> – Университет Альберты (Канада)	Бесплатная	Моделирование гидродинамики естественных потоков и мест обитания рыбы	1D, 2D	Конечно-элементная модель, основанная на консервативном противотоковом методе Петрова–Галёркина	river2d.ca , river2d.ualberta.ca
RIVICE	<i>M. Sydor, R. Carson</i> – Консалтинговая фирма KGS Group (Канада)	Бесплатная	Моделирование процессов речного льда	1D	Гидравлическая модель формирования и таяния ледового покрова, образования внутриводного и донного льда, вскрытия ледового покрова, ледохода и заторообразования	giws.usask.ca/rivice
SPIKI	<i>S. Nolin, V. Roubisova, B. Morse</i> – Университет Лавала (Канада)	Бесплатная	Моделирование динамики потока и льда во время вскрытия реки и заторообразования	1D, 2D	Одномерная конечно-объёмная гидродинамическая модель Сен-Венана, метод гидродинамики сглаженных частиц	Ссылка отсутствует (модель в сети Internet не представлена)

вскрытия реки. Кроме того, предпринимаются попытки математического моделирования транспорта наносов в покрытых льдом руслах рек, при вскрытии рек, а также при формировании и разрушении заторов льда.

Относительно проблемы воздействия заторных процессов на транспорт наносов в реках отмечается, что большинство моделей представлены в одномерной формулировке, которая слабо применима для пространственных задач. Для преодоления этого ограничения предлагаются двухмерные модели, способные учитывать плановые русловые деформации, вызываемые заторными явлениями на широких реках [7]. Отмечено, что формирование различных типов льда и ледовых процессов может значительно влиять на окружающую среду и экологию рек. Таким образом, существует необходимость в приложении математического моделирования к экологическим аспектам речного льда.

Компьютерное моделирование заторов льда

Под компьютерным моделированием подразумевается моделирование с использованием специального программного обеспечения. Главная особенность таких программ состоит в том, что они имеют дружественный для пользователя интерфейс и, как правило, ряд инструментов, позволяющих визуализировать результаты моделирования. В итоге сам процесс моделирования становится доступнее для широкого круга пользователей. Как правило, компьютерные модели носят численный характер, т.е. дают приближённое численное решение исследуемого процесса. Такое упрощение и приближение, с учётом необходимой точности вычислений, удобно для практического применения. В настоящее время существует ряд наиболее распространённых программ для компьютерного моделирования процессов речного льда и, в частности, заторов, а также программ для компьютерного моделирования гидравлики потоков, в которых заторы льда могут учитываться косвенно – путём задания повышенных значений коэффициента шероховатости русла. Некоторые наиболее распространённые компьютерные

программы, позволяющие моделировать заторы льда в реках, приведены в таблице.

Программы, способные имитировать влияние заторов льда на поток. Опосредованный учёт (имитационное моделирование) влияния заторов льда на поток путём задания повышенных значений коэффициента шероховатости русла может выполняться практически в любой программе для гидравлического моделирования. Группой специалистов из Томского государственного университета исследовалось влияние заторов льда на перераспределение расходов воды в многорукавном русле с использованием программы SMS (модуль RMA2) [21]. SMS (Surface-water modeling system) – коммерческий продукт компании Aquaveo, предназначенный для моделирования всего комплекса гидравлики поверхностных водных объектов (водотоков и водоёмов). SMS – это оболочка, или модульная среда, которую можно наполнять теми или иными модулями, ориентированными на решение узкого круга задач. Модуль RMA2 (<https://www.aquaveo.com/software/sms-rma2>), использовавшийся для имитации влияния заторов на распределение расхода воды в многорукавном русле, представляет собой двухмерную гидродинамическую модель, осреднённую по глубине. RMA2 основан на конечно-разностном решении уравнений Навье–Стокса, осреднённых по Рейнольдсу, и может рассчитывать отметки водной поверхности и скоростное поле потока. К достоинствам программы можно отнести интегрированную систему автоматического проектирования и широкий набор инструментов визуализации результатов моделирования – от печати карт до записи динамичных видео. Было показано (подтверждено данными полевых измерений), что RMA2 может использоваться в качестве адекватного инструмента для имитационного моделирования воздействия заторов льда на распределение расхода воды в многорукавном русле.

Программы, непосредственно моделирующие заторы льда. Из численных моделей заторов льда, воплощённых в виде программного кода, исторически первыми были: RIVJAM, разработанная в Национальном институте водных исследований в Канаде, и ICEJAM, созданная в Университете Альберты также в Канаде. Обе модели решают уравнение равновесия затора вместе с уравнением одномерного устано-

вившегося плавно меняющегося потока, способны вычислять профили заторов и рассматривают русло с неподвижной геометрией [19]. Отмечается, что ввиду более простой организации модели ICEJAM именно она легла в основу модуля, отвечающего за моделирование заторов льда в HEC-RAS (Hydrologic Engineering Center's River Analysis System). Вместе с тем RIVJAM имеет некоторые преимущества, например, она учитывает просачивание потока через тело затора, что, как известно, наблюдается в реальности. В моделях, где поток через тело затора игнорируется, приближение к нижней кромке затора создаёт значительные трудности в вычислении.

Увеличение толщины затора и уменьшение глубины под ним приводят к очень малому живому сечению, и для выполнения условия неразрывности скорости потока должны увеличиваться до экстремально больших значений, что привело бы к разрушению нижней поверхности затора и его последующему прорыву. Во избежание таких трудностей некоторые модели определяют максимально допустимые значения скорости воды подо льдом, как это реализовано в ICEJAM, а затем в HEC-RAS. Кроме того, длина вычисляемого затора не определяется в RIVJAM заранее (до вычисления), она служит выходным параметром. Среди ключевых особенностей модели выделяются: процедура решения обыкновенных дифференциальных уравнений, в которой каждый последующий шаг итерации работает с сечением выше по течению от предыдущего, и взаимосвязь приведённого коэффициента шероховатости с мощностью затора и средней глубиной под ним [25]. Тем не менее, обе эти модели могут применяться для решения одних и тех же задач. Главное условие для успешного моделирования в данном случае – независимая калибровка моделей с использованием точных данных полевых измерений и наблюдений. Обе программы распространяются бесплатно, однако для их освоения необходим определённый уровень владения языками программирования.

Популярная альтернатива рассмотренных ранее моделей – программа HEC-RAS, разработанная в Инженерном корпусе армии США. HEC-RAS представляет собой систему для решения комплекса задач речной гидравлики, таких как: расчёт движения донных наносов, определение качества воды, построение кривых сво-

бодной поверхности, а также моделирование ледостава и затора льда. Исследователями из Томского государственного университета изучалась применимость HEC-RAS к задаче прогнозирования заторов льда, их мощности, времени и места возникновения [26]. Исследовали связь скоростного напора с местами регулярного образования заторов. Там же позднее рассматривался вопрос локализации заторов льда в многорукавных руслах [27]. Были разработаны расчётный коэффициент, указывающий (при превышении его порогового значения) на высокую вероятность вскрытия реки, и карты, иллюстрирующие распределение этой вероятности по многорукавному участку русла реки.

Несмотря на то, что HEC-RAS — не самая строгая и сложная программа для численного моделирования заторов льда, она имеет ряд важных практических преимуществ, среди которых: внутренняя простота, доброжелательность к пользователю, графические и табличные опции вывода результатов моделирования [28]. При этом внутренняя простота не приводит к потере адекватности результатов моделирования. Как показала практика, применение более сложной модели к анализу заторов на широких реках даёт сопоставимые с HEC-RAS результаты [17]. HEC-RAS способна моделировать гидравлику не только естественных, но и изменённых человеком русел. В программу встроены инструменты учёта и проектирования дамб, мостов и водопропускных сооружений [29, 30].

Необычный подход к картированию заторных наводнений с использованием инструментария HEC-RAS был предложен в Финском институте окружающей среды [31]. Вместо составления карт зон затопления для единичного затора с единственным набором определённых характеристик было предложено составлять карты, основываясь на широком наборе моделей. Такая необходимость вызвана тем, что модельные переменные затора могут значительно варьировать в зависимости от условий зимы. Очень разные, но всё ещё вероятные комбинации могут приводить к похожим или неожиданным отметкам водной поверхности. Число наблюдений на реках, подверженных влиянию заторов льда, часто невелико, и они нередко содержат неточности. Эти проблемы предлагается решать при помощи программы HEC-RAS, которая моделирует сценарии на ос-

нове диапазонов параметров, определённых экспертами. Моделируя ту же территорию с широким диапазоном параметров, можно обнаружить, какое именно воздействие оказывает каждый параметр на уровни воды в различных частях области моделирования.

Чуть ли не единственная двумерная модель динамики льда — DynaRICE, предназначенная для анализа транспорта поверхностного льда и заторообразования на реках и озёрах. Модель рассчитывает совместную динамику движения льда и течения воды, включая поток через скопления льда и под скоплениями льда. Глубины и элементарные расходы воды в модели вычисляют путём решения проинтегрированных по глубине двумерных гидродинамических уравнений мелкой воды с учётом воздействия поверхностного льда. Модель способна точно воспроизводить затор, время и место его возникновения, а также связанные с ним условия потока и служит хорошим дополнением к ограниченной информации, полученной в ходе полевых наблюдений [32].

Хотя двумерные модели, такие как DynaRICE, и дают более полную картину при изучении заторных явлений, они значительно сложнее их одномерных аналогов, гораздо более редки и, как правило, на сегодняшний день находятся в закрытом доступе. Кроме того, для решения не всех задач такие модели необходимы. В Университете Альберты (Канада) была предложена одномерная модель River1D, предназначенная для моделирования прорыва затора, распространения волны прорыва затора, а также влияния трения льда на поток и взаимодействия потока со льдом. Возможность оценивать воздействие льда на распространение волны прорыва затора как в самом заторе, так и в принимающем русле — одна из главных особенностей модели [33]. В Университете Лавала (Канада) разработана модель SPIKI, находящаяся в открытом доступе, которая способна моделировать динамику потока и льда во время вскрытия реки и формирования затора [18]. Модель состоит из двух независимых компонент: одномерной конечно-объёмной гидродинамической модели Сен-Венана и двумерной модели гидродинамики сглаженных частиц, моделирующей динамику ломаного льда. Модель SPIKI во многом основана на модели DynaRICE, но содержит некоторые особенности, среди которых: переменный угол трения, ядро сглаживания

кубического сплайна, взаимодействие с трением берегов. Использование переменного угла внутреннего трения приводит к более сложному профилю затора, что в свою очередь требует данных полевых измерений для проверки правильности результатов моделирования. Благодаря учёту трения между ломаным льдом и берегами, формирование затора значительно запаздывает, но размеры конечного профиля при этом не обязательно меняются. Модель SPIKI способна адекватно моделировать профиль затора, несмотря на неопределённость с расходом воды во время формирования затора и представление поперечных сечений в прямоугольном виде.

Хотя вопрос изучения гидравлики заторов льда, формирующихся при вскрытии реки, важен сам по себе, нередко изучение затора надо начинать уже с началом осенних ледовых явлений, так как известно, что особо опасные заторы формируются, накладываясь на осенние заборы. Поэтому существует потребность в разработке не просто моделей, воспроизводящих гидравлику заторов, но комплексных моделей ледовых явлений. Модель RIVICE для всего комплекса ледовых явлений и процессов разработана в ряде консалтинговых фирм в Канаде, ведущая из которых — KGS Group. RIVICE распространяется бесплатно Университетом Саскачевана при поддержке Министерства окружающей среды Канады. RIVICE — одномерная модель, имитирующая следующие основные ледовые процессы в реке: образование и транспорт льда, развитие ледяного покрова (торошение, погружение под воду, нагромождение), формирование затора льда [34]. Анализ чувствительности модели RIVICE показал, что влияние параметров и граничных условий модели на подпорные уровни представляется как функция распределения заторных масс вдоль участка реки. Воды заторного наводнения, переливающиеся через бровки берегов и отводящиеся вокруг затора, в модели не учитываются, однако ведётся работа по совмещению модели RIVICE с двухмерной моделью поймы с включением бессточных областей, что позволит устранить этот недостаток. Ограничение RIVICE состоит в том, что она способна формировать ледяной покров только посредством наложения внутриводного и плывущего ломаного льда, что справедливо для рек, скорость потока которых при замерзании или зато-

рообразовании превышает 0,4 м/с. Также в модели недостаёт термического модуля, который позволит учитывать термическое утолщение ледового покрова при установлении ледостава.

Направления развития и сравнение некоторых моделей

Уже более 20 назад канадские исследователи из Университетов Лавала и Альберты определили основные направления развития в области изучения ледовых процессов в реках. Среди них: налаживание взаимодействия моделей геоморфологии и окружающей среды с количественными гидродинамическими моделями речного льда; разработка инструментов принятия решений для организаций, ответственных за мониторинг и регулирование опасных ледовых процессов в реках [35]. В целом можно отметить определённый прогресс, который характеризуется появлением и развитием широкого набора одномерных моделей ледовых процессов, находящихся в открытом доступе (RIVICE, RIVJAM, ICEJAM, HEC-RAS и др.), а также ряда двухмерных моделей, в основном коммерческих (например, модель CRISSP, появившаяся в результате развития DynaRICE). Значительные усилия направлены на создание и развитие моделей со стороны профильных организаций в США (Cold Regions Research and Engineering Laboratory — CRREL), в Канаде (Committee on River Ice Processes and the Environment — CRIPE), на международном уровне (IAHR Ice Research and Engineering Committee) и при поддержке правительств ряда стран (Канада, США, Китай).

Устойчивое развитие численных моделей процессов речного льда в течение последних десятилетий отмечается в Канаде [12]. Всё это время разработка моделей велась в основном в различных консалтинговых фирмах при поддержке правительства стран-разработчиков. Так, достаточно сложная и развитая модель CRISSP была разработана при поддержке канадских и американских гидроэнергетических компаний. Компьютерные программы для моделирования, разработанные консалтинговыми фирмами, как правило, частные, но математические уравнения, лежащие в их основе, обычно опубликованы в открытом доступе. Большинство моделей,

находящихся в открытом доступе — ICEJAM, HEC-RAS, RIVJAM, построены на относительно простых алгоритмах, однако есть и несколько довольно сложных моделей — River1D/2D, SPIKI, RIVICE. Канадские университеты и гидроэнергетические компании всё чаще применяют, тестируют и калибруют модели. Основные результаты развития моделей и их приложения к решению практических задач регулярно докладываются на тематических конференциях, главные из которых — RIW (River Ice Workshop) и IAHR (The International Association for Hydro-Environment Engineering and Research) Ice Symposium.

Сопоставление различных методов изучения ледовых процессов показывает, что уровень развития моделей, за редким исключением [36], пока не позволяет прогнозировать время и место образования затора [37]. Прогнозирование заторов ограничивается определением толщины ледяных скоплений и соответствующих уровней воды с использованием аналитического и численного подходов. При этом большее внимание уделяется прогнозу уровней воды [38]. При прогнозе собственно заторов ключевое предположение состоит в том, что ломаный лёд в заторе ведёт себя как плавающая сыпучая масса, которая подчиняется критерию разрушения Мора–Кулона.

Неуравновешенные заторы при установившемся движении достаточно точно прогнозируются при помощи одномерных численных моделей — ICEJAM, RIVJAM, HEC-RAS. Главная отличительная черта двумерных динамических моделей, например DynaRICE, — дискретная элементная модель, которая не нуждается в применении концепции сыпучей сплошной среды. Вместо этого движение каждого блока внутри затора на малых временных отрезках прогнозируется путём вычисления сил, действующих на каждый блок со стороны воды и окружающих блоков. Этот подход даёт важное понимание как развития, так и конечной конфигурации затора и позволяет прогнозировать воздействия, которые заторы оказывают на сооружения.

Серия тестов ряда моделей (CRISSP 2D, HEC-RAS, ICEJAM, ICEPRO, ICESIM, MIKE 11, River1D, и RIVJAM) показала, что общая эффективность всех моделей хорошая, когда доступны данные для калибровки, но когда модели применяются в некалиброванном, или «слепо» режиме, результаты их работы сильно разнятся [20]. Раз-

нообразии результатов в «слепо» режиме может быть отнесено больше к вариациям в интерпретации физических процессов пользователями, чем к механике численных вычислений.

Заключение

Рассмотренные в настоящем обзоре подходы к моделированию заторов льда позволяют утверждать, что на сегодняшний день компьютерное моделирование вышло на ведущие позиции и выступает основным инструментом изучения ледовых процессов на реках. Вместе с тем ни одна компьютерная модель не даст достаточно адекватного представления об изучаемых процессах, если она не откалибрована на достоверных данных полевых и лабораторных наблюдений и измерений. Проанализированный здесь спектр модельных подходов и моделей, наряду с конкретными случаями их применения, должен послужить хорошей базой для любого специалиста, начинающего изучать тот или иной аспект заторообразования и ледовых процессов на реках, и помочь выбрать наиболее подходящий инструмент для своего собственного исследования. Развитие моделей, с одной стороны, предоставляет нам мощные вычислительные инструменты обработки большого объёма данных измерений и наблюдений, а с другой — внушает опасения по поводу недостаточного количества усилий, направленных на построение адекватно работающих детерминированных моделей, характеризующихся свойством переносимости.

Обратим внимание и на географию распространения моделей. Наибольшего успеха в построении и развитии моделей добились (в убывающем порядке) Канада, США и Китай, что объясняется поддержкой исследований правительствами этих государств. В России же, где построение и развитие собственных моделей значительно отстаёт, необходимо осваивать существующие модели, разработанные ведущими мировыми научными группами, учиться грамотно эти модели применять. Кроме того, необходимо налаживать механизм взаимодействия научных групп и институтов, ведущих моделирование, и структур, ответственных за принятие решений в вопросах предупреждения и ликвидации негативных последствий образования ледяных заторов.

Литература

References

1. Клавен А.Б., Копалиани З.Д. Экспериментальные исследования и гидравлическое моделирование речных потоков и руслового процесса. СПб.: Нестор-История, 2011. 504 с.
2. Healy D., Hicks F. Experimental study of ice jam formation dynamics // Journ. of Cold Regions Engineering. 2006. V. 20. № 4. P. 117–139. doi: 10.1061/(ASCE)0887-381X(2006)20:4(117).
3. Healy D., Hicks F. Experimental study of ice jam thickening under dynamic flow conditions // Journ. of Cold Regions Engineering. 2007. V. 21. № 3. P. 72–91. doi: 10.1061/(ASCE)0887-381X(2007)21:3(72).
4. Pahlavan H., Clark S., Wang M., Malenchak J. An experimental investigation of turbulent flow characteristics beneath an ice jam // 18th Workshop on the Hydraulics of Ice Covered Rivers. Quebec, Canada: CRIPE, 2015.
5. Shen H. Mathematical modeling of river ice processes // Cold Regions Science and Technology. 2010. V. 62. № 1. P. 3–13. doi: 10.1016/j.coldregions.2010.02.007.
6. Debolskaya E., Derbenev M., Maslikova O. Numerical modeling of ice jams // Hydrophysical Processes. 2004. V. 31. № 5. P. 533–539. doi: 10.1023/B:WARE.0000041917.09525.de.
7. Debolskaya E., Debolskii V., Maslikova O. Two-dimensional model of channel deformations caused by ice-jam formation // Power Technology and Engineering. 2009. V. 43. № 4. P. 218–222.
8. Wang J., Sui J., Chen P. Numerical simulations of ice accumulation under ice cover along a river bend // Intern. Journ. of Environmental Science & Technology. 2009. V. 6. № 1. P. 1–12. doi: 10.1007/BF03326055.
9. Wang J., Shi F., Chen P., Wu P., Sui J. Simulations of ice jam thickness distribution in the transverse direction // Journ. of Hydrodynamics. Ser. B. 2014. V. 26. № 5. P. 762–769. doi: 10.1016/S1001-6058(14)60085-8.
10. She Y., Hicks F. Ice jam release wave modeling: considering the effects of ice in a receiving channel // 18th IAHR Intern. Symposium on Ice. Sapporo, Japan: IAHR, 2006. V. 28. P. 125–132.
11. Wang J., Sui J., Guo L., Karney B., Jupner R. Forecast of water level and ice jam thickness using the back propagation neural network and support vector machine methods // Intern. Journ. of Environmental Science & Technology. 2010. V. 7. № 2. P. 215–224. doi: 10.1007/BF03326131.
12. Luo D. Risk evaluation of ice–jam disasters using gray systems theory: the case of Ningxia–Inner Mongolia reaches of the Yellow River // Natural Hazards. 2014. V. 71. № 3. P. 1419–1431. doi: 10.1007/s11069-013-0952-z.
13. Mahabir C., Hicks F., Favek A. Transferability of a neuro–fuzzy river ice jam flood forecasting model // Cold Regions Science and Technology. 2007. V. 48. № 3. P. 188–201. doi: 10.1016/j.coldregions.2006.12.004.
1. Klaven A.B., Kopaliani Z.D. Eksperimental'nye issledovaniya i gidravlichesкое modelirovanie rechnykh potokov i ruslovogo protsessa. Experimental studies and hydraulic modeling of river streams and river bed evolution. St. Petersburg: Nestor-Istoriya, 2011: 504 p. [In Russian].
2. Healy D., Hicks F. Experimental study of ice jam formation dynamics. Journ. of Cold Regions Engineering. 2006, 20 (4): 117–139. doi: 10.1061/(ASCE)0887-381X(2006)20:4(117).
3. Healy D., Hicks F. Experimental study of ice jam thickening under dynamic flow conditions. Journ. of Cold Regions Engineering. 2007, 21 (3): 72–91. doi: 10.1061/(ASCE)0887-381X(2007)21:3(72).
4. Pahlavan H., Clark S., Wang M., Malenchak J. An experimental investigation of turbulent flow characteristics beneath an ice jam. 18th Workshop on the Hydraulics of Ice Covered Rivers. 2015.
5. Shen H. Mathematical modeling of river ice processes. Cold Regions Science and Technology. 2010, 62 (1): 3–13. doi: 10.1016/j.coldregions.2010.02.007.
6. Debolskaya E., Derbenev M., Maslikova O. Numerical modeling of ice jams. Hydrophysical Processes. 2004, 31 (5): 533–539. doi: 10.1023/B:WARE.0000041917.09525.de.
7. Debolskaya E., Debolskii V., Maslikova O. Two-dimensional model of channel deformations caused by Ice-jam formation. Power Technology and Engineering. 2009, 43 (4): 218–222.
8. Wang J., Sui J., Chen P. Numerical simulations of ice accumulation under ice cover along a river bend. Intern. Journ. of Environmental Science & Technology. 2009, 6 (1): 1–12. doi: 10.1007/BF03326055.
9. Wang J., Shi F., Chen P., Wu P., Sui J. Simulations of ice jam thickness distribution in the transverse direction. Journ. of Hydrodynamics. Ser. B. 2014, 26 (5): 762–769. doi: 10.1016/S1001-6058(14)60085-8.
10. She Y., Hicks F. Ice jam release wave modeling: considering the effects of ice in a receiving channel. 18th IAHR Intern. Symposium on Ice. 2006, 28: 125–132.
11. Wang J., Sui J., Guo L., Karney B., Jupner R. Forecast of water level and ice jam thickness using the back propagation neural network and support vector machine methods. Intern. Journ. of Environmental Science & Technology. 2010, 7 (2): 215–224. doi: 10.1007/BF03326131.
12. Luo D. Risk evaluation of ice-jam disasters using gray systems theory: the case of Ningxia–Inner Mongolia reaches of the Yellow River. Natural Hazards. 2014, 71 (3): 1419–1431. doi: 10.1007/s11069-013-0952-z.
13. Mahabir C., Hicks F., Favek A. Transferability of a neuro–fuzzy river ice jam flood forecasting model. Cold Regions Science and Technology. 2007, 48 (3): 188–201. doi: 10.1016/j.coldregions.2006.12.004.

2007. V. 48. № 3. P. 188–201. doi: 10.1016/j.coldregions.2006.12.004.
14. Малегин И.В. Методика прогноза образования ледовых заторов на реках на основе теории распознавания образов // Вестн. МГУ. Сер. 5. География. 2014. Т. 3. С. 43–47.
15. Mahabir C. Regression and fuzzy logic based ice jam flood forecasting // Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2008. P. 307–325. doi: 10.1007/978-3-540-75136-6_16.
16. Шлычков В.А. Плановая динамико–стохастическая модель ледохода // Вычислительные технологии. 2008. Т. 13. № 2. С. 131–137.
17. Eliasson J., Grondal G. Development of a river ice jam by a combined heat loss and hydraulic model // Hydrology and Earth System Sciences. 2008. V. 12. № 6. P. 1249–1256. doi: 10.5194/hess-12-1249-2008.
18. Nolin S., Roubtsova V., Morse B., Quach T. Smoothed particle hydrodynamics hybrid model of ice–jam formation and release // Canadian Journ. of Civil Engineering. 2009. V. 36. № 7. P. 1133–1143. doi: 10.1139/L09-051.
19. Healy D., Hicks F. Comparison of ICEJAM and RIVJAM Ice Jam Profile Models // Journ. of Cold Regions Engineering. 1999. V. 13. № 4. P. 180–198. doi: 10.1061/(ASCE)0887-381X(1999)13:4(180).
20. Carson R., Beltaos S., Groeneveld J., Healy D., She Y., Malenchak J., Morris M., Saucet J.-P., Kolarski T., Shen H. Comparative testing of numerical models of river ice jams // Canadian Journ. of Civil Engineering. 2011. V. 38. № 2. P. 669–678. doi: 10.1139/111-036.
21. Земцов В.А., Вершинин Д.А., Инишев Н.Г. Имитационное моделирование заторов (на примере р. Томь, Западная Сибирь) // Лёд и Снег. 2014. Т. 54. № 3. С. 59–68. doi: 10.15356/2076-6734-2014-3-59-68.
22. Beltaos S., Burrell B. Hydrotechnical advances in Canadian river ice science and engineering during the past 35 years // Canadian Journ. of Civil Engineering. 2015. V. 42. № 9. P. 583–591. doi: 10.1139/cjce-2014-0540.
23. Бузин В.А., Зиновьев А.Т. Ледовые процессы и явления на реках и водохранилищах. Методы математического моделирования и опыт их реализации для практических целей (обзор современного состояния проблемы). Барнаул: Пять плюс, 2009. 168 с.
24. Lagadec A., Boucher E., Germain D. Tree ring analysis of hydro–climatic thresholds that trigger ice jams on the Mistassini River, Quebec // Hydrological Processes. 2015. V. 29. № 23. P. 4880–4890. doi: 10.1002/hyp.10537.
25. Beltaos S., Burrell B. Ice-jam model testing: Matapedia River case studies, 1994 and 1995 // Cold Regions Science and Technology. 2010. V. 60. № 1. P. 29–39. doi: 10.1016/j.coldregions.2009.05.014.
26. Вершинин Д.А., Татарников А.В., Орлов Е.И. Возможности прогнозирования возникновения ледовых заторов на основе компьютерных моделей
14. Malygin I.V. A methodology of forecasting of ice jams formation on rivers based on pattern recognition theory. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya 5. Geografiya*. Herald of the Moscow University. Ser. 5: Geography. 2014, 3: 43–47. [In Russian].
15. Mahabir C. Regression and fuzzy logic based ice jam flood forecasting. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2008: 307–325. doi: 10.1007/978-3-540-75136-6_16.
16. Shlychkov V.A. A spatial dynamic-stochastic model of ice drift. *Vychislitel'nye tekhnologii*. Computational Technologies. 2008, 13 (2): 131–137. [In Russian].
17. Eliasson J., Grondal G. Development of a river ice jam by a combined heat loss and hydraulic model. *Hydrology and Earth System Sciences*. 2008, 12 (6): 1249–1256. doi: 10.5194/hess-12-1249-2008.
18. Nolin S., Roubtsova V., Morse B., Quach T. Smoothed particle hydrodynamics hybrid model of ice–jam formation and release. *Canadian Journ. of Civil Engineering*. 2009, 36 (7): 1133–1143. doi: 10.1139/L09-051.
19. Healy D., Hicks F. Comparison of ICEJAM and RIVJAM Ice Jam Profile Models. *Journ. of Cold Regions Engineering*. 1999, 13 (4): 180–198. doi: 10.1061/(ASCE)0887-381X(1999)13:4(180).
20. Carson R., Beltaos S., Groeneveld J., Healy D., She Y., Malenchak J., Morris M., Saucet J.-P., Kolarski T., Shen H. Comparative testing of numerical models of river ice jams. *Canadian Journ. of Civil Engineering*. 2011, 38 (2): 669–678. doi: 10.1139/111-036.
21. Zemtsov V.A., Vershinin D.A., Inishev N.G. Simulation modeling of ice jams (case study on Tom river, Western Siberia). *Led i Sneg*. Ice and Snow. 2014, 54 (3): 59–68. [In Russian]. doi: 10.15356/2076-6734-2014-3-59-68.
22. Beltaos S., Burrell B. Hydrotechnical advances in Canadian river ice science and engineering during the past 35 years. *Canadian Journ. of Civil Engineering*. 2015, 42 (9): 583–591. doi: 10.1139/cjce-2014-0540.
23. Buzin V.A., Zinov'ev A.T. *Ledovye protsessy i yavleniya na rekakh i vodokhranilisckhkh. Metody matematicheskogo modelirovaniya i opyt ikh realizatsii dlya prakticheskikh tseley: (obzor sovremennogo sostoyaniya problemy)*. Ice processes and events on rivers and reservoirs. Methods of mathematical modeling and experience of their application for practical purposes (a review of modern condition of the issue). Barnaul: Pyat' plyus, 2009: 168 p. [In Russian].
24. Lagadec A., Boucher E., Germain D. Tree ring analysis of hydro–climatic thresholds that trigger ice jams on the Mistassini River, Quebec. *Hydrological Processes*. 2015, 29 (23): 4880–4890. doi: 10.1002/hyp.10537.
25. Beltaos S., Burrell B. Ice-jam model testing: Matapedia River case studies, 1994 and 1995. *Cold Regions Science and Technology*. 2010, 60 (1): 29–39. doi: 10.1016/j.coldregions.2009.05.014.

- русла // Вестн. Томского гос. ун-та. 2011. № 352. С. 221–224.
27. *Tapacov A.C., Verшинин Д.А.* Определение локализации ледовых заторов на разветвлённом участке русла р. Томь с помощью компьютерного гидравлического моделирования // Вестн. Томского гос. ун-та. 2015. № 390. С. 218–224.
 28. *Beltaos S., Burrell B.* Hydroclimatic aspects of ice jam flooding near Perth-Andover, New Brunswick // *Canadian Journ. of Civil Engineering*. 2015. V. 42. № 9. P. 686–695. doi: 10.1139/cjce-2014-0372.
 29. *Lever J., Daly S.* Upstream effects of Cazenovia Creek ice-control structure // *Journ. of Cold Regions Engineering*. 2003. V. 17. № 1. P. 3–17. doi: 10.1061/(ASCE)0887-381X(2003)17:1(3).
 30. *Sui J., Karney B., Fang D.* Ice jams in a small river and the HEC-RAS modeling // *Journ. of Hydrodynamics*. Ser. B. 2005. V. 17. № 2. P. 127–133.
 31. *Aaltonen J., Huokuna M.* Flood mapping of river ice breakup jams in River Kyrönjoki delta // 19th Workshop on the Hydraulics of Ice Covered Rivers. Whitehorse, Yukon, Canada: CRIPE, 2017.
 32. *Shen H., Liu L.* Shokotsu River ice jam formation // *Cold Regions Science and Technology*. 2003. V. 37. № 1. P. 35–49. doi: 10.1016/S0165-232X(03)00034-X.
 33. *She Y., Andrishak R., Hicks F., Morse B., Stander E., Krath C., Keller D., Abarca N., Nolin S., Tanekou F., Mahabir C.* Athabasca River ice jam formation and release events in 2006 and 2007 // *Cold Regions Science and Technology*. 2009. V. 55. № 2. P. 249–261. doi: 10.1016/j.coldregions.2008.02.004.
 34. *Lindenschmidt K.-E.* RIVICE – A Non-proprietary, open-source, one-dimensional river-ice model // *Water*. 2017. V. 9. № 5. P. 314–329. doi: 10.3390/w9050314.
 35. *Morse B., Hicks F.* Advances in river ice hydrology 1999–2003 // *Hydrological Processes*. 2005. V. 19. № 1. P. 247–263. doi: 10.1002/hyp.5768.
 36. *Debolskaya E.* Numerical modeling of ice regime in rivers. UK, Oxford: UNESCO, Eolss Publishers, 2009. P. 137–165.
 37. *Hicks F.* River Ice. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2008. P. 281–305. doi: 10.1007/978-3-540-75136-6_15.
 38. *Бужин В.А.* Затопы льда и заторные наводнения на реках. СПб.: Гидрометеиздат, 2004. 204 с.
 26. *Vershinin D.A., Tatarnikov A.V., Orlov E.I.* Opportunities for forecasting of ice jams formation based on digital elevation models. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta*. Herald of the Tomsk State University 2011, 352: 221–224. [In Russian].
 27. *Tarasov A.S., Vershinin D.A.* Determination of ice jams localization at braided reach of Tom river using computational hydraulic modeling. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta*. Herald of the Tomsk State University. 2015, 390: 218–224. [In Russian].
 28. *Beltaos S., Burrell B.* Hydroclimatic aspects of ice jam flooding near Perth-Andover, New Brunswick. *Canadian Journ. of Civil Engineering*. 2015, 42 (9): 686–695. doi: 10.1139/cjce-2014-0372.
 29. *Lever J., Daly S.* Upstream Effects of Cazenovia Creek Ice-Control Structure. *Journ. of Cold Regions Engineering*. 2003, 17 (1): 3–17. doi: 10.1061/(ASCE)0887-381X(2003)17:1(3).
 30. *Sui J., Karney B., Fang D.* Ice jams in a small river and the HEC-RAS modeling. *Journ. of Hydrodynamics*, Ser. B. 2005, 17 (2): 127–133.
 31. *Aaltonen J., Huokuna M.* Flood mapping of river ice breakup jams in River Kyrönjoki delta. 19th Workshop on the Hydraulics of Ice Covered Rivers. 2017.
 32. *Shen H., Liu L.* Shokotsu River ice jam formation. *Cold Regions Science and Technology*. 2003, 37 (1): 35–49. doi: 10.1016/S0165-232X(03)00034-X.
 33. *She Y.* Athabasca River ice jam formation and release events in 2006 and 2007. *Cold Regions Science and Technology*. 2009, 55 (2): 249–261. doi: 10.1016/j.coldregions.2008.02.004.
 34. *Lindenschmidt K.-E.* RIVICE – A Non-proprietary, open-source, one-dimensional river-ice model. *Water*. 2017, 9 (5): 314–329. doi: 10.3390/w9050314.
 35. *Morse B., Hicks F.* Advances in river ice hydrology 1999–2003. *Hydrological Processes*. 2005, 19 (1): 247–263. doi: 10.1002/hyp.5768.
 36. *Debolskaya E.* Numerical modeling of ice regime in rivers. UK, Oxford: UNESCO, Eolss Publishers, 2009: 137–165.
 37. *Hicks F.* River Ice. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2008: 281–305. doi: 10.1007/978-3-540-75136-6_15.
 38. *Buzin V.A.* Zatory l'da i zatornye navodneniya ne rekakh. Ice jams and ice jam floods on rivers. St.Petersburg: Hydrometeoizdat, 2004: 204 p. [In Russian].