

Ледники и ледниковые покровы

УДК 551.321.61

Об оценке объёма льда горных ледников

© 2013 г. Ю.Я. Мачерет, С.С. Кутузов, В.В. Мацковский, И.И. Лаврентьев

Институт географии РАН, Москва

s.kutuzov@gmail.com

Статья принята к печати 15 августа 2012 г.

Горный ледник, определение объёма ледника, оценка запасов льда.
Glacier volume estimation, ice storage assessment, mountain glacier.

Имеющиеся данные по измерению толщины и объёма горных ледников, а также существующие расчётные методы не позволяют достаточно точно установить запасы льда в горно-ледниковых системах. Обсуждаются существующие методы определения объёма горных ледников и запасов льда в горно-ледниковых системах, а также способы их более точной оценки на основе ограниченных данных о толщине и объёме отдельных ледников. Оценивается ошибка определения объёма отдельных ледников при ограниченном числе измерений.

Введение

С научной и практической точек зрения важно знать количество и изменения во времени запасов воды в горных ледниках, поскольку сокращение их площади и объёма вызывает в настоящее время дополнительное повышение уровня Мирового океана на $0,41 \pm 0,08$ мм/год [28, 32]. Кроме того, горные ледники служат важным ресурсом пресной воды, используемой для орошения, хозяйственных и производственных нужд, а также выработки электроэнергии. Площадь ледников в районах современного горного оледенения известна по данным каталогизации и инвентаризации, основанной на анализе топографических карт, аэрофото- и космоснимков разных лет. Так, в Мировом каталоге ледников [29, 39] содержится информация более чем о 130 тыс. ледниках по состоянию на вторую половину XX в. В этот каталог ледников вошли в том числе и данные для территории бывшего СССР, опубликованные в 20 томах Каталога ледников СССР (1967–1982 гг.). Согласно другим данным, в районах горного оледенения, включая ледники вокруг ледниковых покровов Гренландии и Антарктиды, насчитывается около 160 тыс. ледников [19], которые занимают площадь около 785 ± 100 тыс. км² и содержат около 260 ± 65 тыс. км³ льда [23]. На территории бывшего СССР в районах горного оледенения насчитывается около 23 тыс. ледников (Каталог ледников СССР) суммарной площадью $23\,750$ км² с общими оцененными запасами льда 2000 км³ [6]. В последние годы ведётся инвентаризация ледников в районах горного

оледенения по программе GLIMS на основе космических снимков ASTER со спутника TERRA (www.glims.org), что позволяет оценить современное состояние горного оледенения Земли и его изменения за последние десятилетия или даже столетия.

Вместе с тем сведения о толщине ледников, необходимые для определения их объёма, более ограничены: они есть только менее чем для 0,3% общего числа горных ледников [11]. Большинство этих данных получено вдоль отдельных профилей или даже в отдельных точках; достоверные цифры о толщине ледников, пригодные для определения их объёма, ещё более ограничены. В 1950–60 годах основным и наиболее точным способом их получения были сейсмические методы отражённых и преломлённых волн [10], позднее – радиолокационные методы, обеспечивающие высокую (2–3%) точность измерения толщины льда с наземного и воздушного транспорта или в пешеходных маршрутах [11]. В этой статье мы обсудим существующие методы определения объёма горных ледников и запасов льда в горно-ледниковых системах и пути их более точной оценки на основе ограниченных данных о толщине и объёме отдельных ледников.

Методы определения объёма горных ледников

Наиболее точно объём ледника определяется по карте толщины льда, построенной на основе данных площадной радиолокационной съёмки по густой сети точек или профилей измерений с последующим вычислением объёма с помощью современных ГИС-тех-

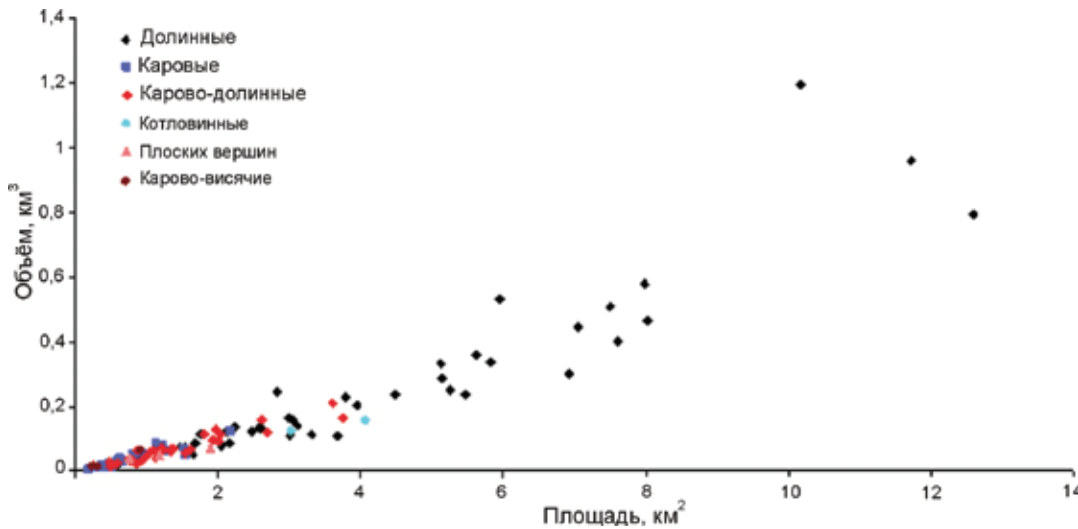


Рис. 1. Объём и площадь 121 ледника Алтая по данным наземных радиолокационных исследований 1988–2001 гг. [15–17]

Fig. 1. Volume and surface area of 121 glaciers in Altai according to ground-based radio-echo sounding surveys in 1988–2001 [15–17]

нологий. Если данных для построения карты толщины льда недостаточно, то для оценки объёма ледника используют приближённые методы. Они применяются, когда толщина льда измерена только вдоль одного профиля, например, вдоль осевой линии ледника [3], или в ограниченном числе точек [25]. Особую группу составляют балансово-динамические методы оценки объёма ледников [19, 24, 30, 33–35], которые требуют знания баланса массы, границ и высоты поверхности ледников, а также применения моделей, описывающих их течение и изменение площади или длины. В данной статье эти методы не рассматриваются.

Карты толщины льда по данным площадной съёмки.

На горных ледниках площадные съёмки выполняются по системе профилей, покрывающих всю или только доступную для измерений площадь ледника. Такие измерения позволяют составить карту толщины льда и по ней определить объём всего или только исследованной части ледника на момент измерений. При этом предполагают, что на краях ледника толщина льда равна нулю, поэтому необходимо как можно точнее знать границы ледника. Этот способ – наиболее точен, однако с его помощью в разных районах горного оледенения к настоящему времени определён объём только 235 ледников. Большой массив данных получен в Альпах: на территории Австрии, Швейцарии и Италии в общей сложности получены материалы по 104 ледникам [21, 26, 28].

Наибольший объём площадных съёмок толщины льда выполнен на ледниках Алтая – в Северо-, Южно-Чуйском и Катынском хребтах. Здесь в 2003 г. насчитывалось 730 ледников общей площадью 632,9 км² [15]. В 1988–2001 гг. здесь были получены данные о толщине льда для 131 ледника, причём для 121 из них (16,4% общего числа) были построены карты толщины льда в масштабах 1:25 000 и 1:50 000, а также определены их объём и площадь [15–17]. Этот массив данных в настоящее время – самый большой для горно-леднико-

вых районов Мира и содержит ледники разных морфологических типов: долинные – 47, каровые – 27, карово-долинные – 37, карово-висячие – 3, плоских вершин – 3, котловинные – 2, сложно-долинные – 1. Площадь их – самая разная: от 0,3 до 11,2 км² (рис. 1). Общая площадь этих ледников – 269,75 км², общий объём – 15,33 км³, средняя толщина – 56,8 м.

Для дальнейшего анализа мы выделили на Алтае четыре группы ледников по морфологическому типу: группа 1 – долинные и сложно-долинные ледники; группа 2 – каровые ледники; группа 3 – карово-долинные и карово-висячие ледники; группа 4 – плоских вершин и котловинные, полагая, что карово-долинные и карово-висячие ледники, а также долинные и сложно-долинные ледники имеют схожие черты подлёдного рельефа. Ледники плоских вершин и котловинные выделены в отдельную группу, так как они представлены всего пятью ледниками. Этот массив данных по Алтаю использован нами, чтобы оценить, как ошибка определения суммарного объёма включённого в него 121 ледника зависит от морфологического типа, площади и числа ледников в соответствующей выборке.

Измерения по одному продольному профилю. При аэрофотограмметрировании толщину льда чаще всего измеряют вдоль одного продольного профиля, а для определения объёма ледника используют приближённые методы [3, 5, 18]. В одном из них [3] исходными данными служат высота поверхности, измеренная толщина льда вдоль продольного профиля, а также высота и нулевая толщина льда на краях ледника (метод трёх точек – МТТ). Объём ледника V вычисляется как произведение площади отдельных поперечных сечений ледника F_i на расстояние d_i между этими сечениями:

$$V = \sum F_i d_i. \quad (1)$$

При этом в случае определения площади поперечных сечений предполагается, что поверхность и толщина вдоль этих сечений имеют форму парабол или

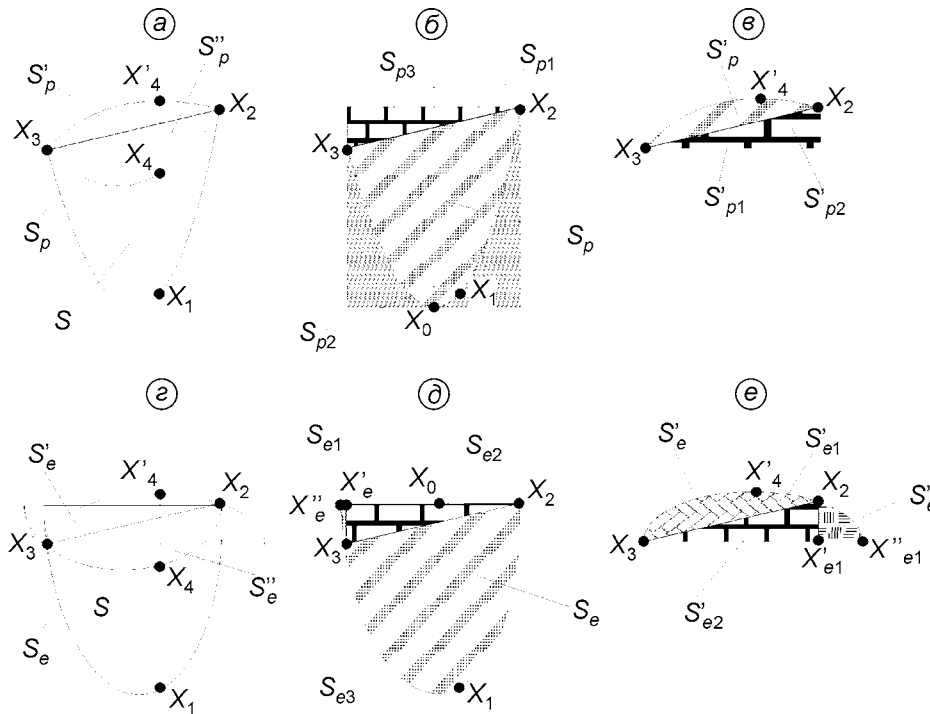


Рис. 2. К расчёту площади сечения ледника путём аппроксимации его высоты поверхности и ложа параболой (а–в) и эллипсами (з–е)

Fig. 2. Glacier cross-section area calculation using parabolic (a–в) and ellipsoidal (з–е) approximation of surface and bedrock elevation

полуэллипсов, проходящих через три точки, одна из которых находится на продольном профиле, а две других – на краях ледника. В простейшем случае (поверхность ледника горизонтальная) этот параметр определяется соотношением

$$F_i = (2/3) h_i w_i, \quad (2)$$

где h_i – толщина ледника в точках пересечения продольного профиля и поперечных сечений; w_i – ширина ледника вдоль поперечного сечения.

Если поверхность ледника горизонтальна и его поперечные сечения имеют форму полуэллипса, большая полуось которого a_i равна половине ширины w_i поперечного сечения ледника, а малая полуось b_i – толщине ледника h_i в точке пересечения продольного профиля и поперечного сечения, то площадь F_i поперечного сечения ледника определяется как

$$F_i = 0,25 \pi h_i w_i, \quad (3)$$

а объём ледника – по формуле, аналогичной формуле (1).

Из формул (2) и (3) следует, что по методу парабол площадь F_i поперечного сечения ледника в 0,84 раза меньше, чем по методу эллипсов. Тем не менее, поскольку большинство долинных ледников занимает троговые долины U-образной формы, предполагается [36, 37], что они имеют поперечное сечение параболической формы. Более точные оценки площади поперечного сечения ледников F_i методами парабол и полуэллипсов будут рассмотрены далее. Они учитывают, во-первых, отличие высот на концах поперечных профилей и, во-вторых, выпуклую или вогнутую форму поверхности вдоль этих профилей (рис. 2).

Метод парабол. При аппроксимации сечения ледника параболой по точкам X_2 и X_3 на краях ледника и X_1 на ложе (см. рис. 2, а), уравнение параболы принимает следующий вид:

$$F(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} y_1 + \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} y_2 + \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} y_3, \quad (4)$$

где (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) – координаты точек X_1 , X_2 и X_3 соответственно.

Если точка на поверхности ледника находится ниже прямой, соединяющей точки X_2 и X_3 (X_4), или выше неё (X'_4), то поверхность ледника также аппроксимируется параболой по аналогичной формуле с заменой координат (x_1, y_1) на (x_4, y_4) или (x'_4, y'_4) соответственно. При этом площадь сечения ледника вычисляется по формулам

$$S = S_p + S'_p \quad (5a)$$

или

$$S = S_p - S''_p, \quad (5b)$$

где S_p – площадь сегмента параболы, соответствующей ложу ледника; S'_p и S''_p – площади сегмента параболы, соответствующей поверхности ледника при выпуклой и вогнутой поверхности соответственно (см. рис. 2, а).

Площадь S_p определяется как

$$S_p = S_{p1} - S_{p2} - S_{p3}, \quad (6)$$

где S_{p1} – площадь прямоугольника; S_{p2} – площадь под кривой $F(x)$; S_{p3} – площадь прямоугольного треугольника (см. рис. 2, б).

Координаты (x_0, y_0) точки X_0 вычисляются следующим образом:

$$x_0 = 0,5(x_{k1} + x_{k2}); y_0 = F(x_0), \quad (7)$$

где x_{k1} и x_{k2} – корни уравнения $F(x) = 0$ (действительные или комплексные).

Далее вертикально перемещаем точку X_0 на ось x и находим её смещённые координаты:

$$y'_1 = y_1 - y_0; y'_2 = y_2 - y_0; y'_3 = y_3 - y_0. \quad (8)$$

Тогда

$$F'(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} y'_1 + \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} y'_2 + \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} y'_3. \quad (9)$$

Отсюда

$$S_{p1} = |y'_2(x_2 - x_3)|; \quad (10)$$

$$S_{p2} = \int_{x_3}^{x_2} F'(x) dx; \quad (11)$$

$$S_{p3} = |0,5(y'_2 - y'_3)(x_2 - x_3)|. \quad (12)$$

Вычисления несколько упрощаются, если не переносить точку X_0 на ось x , но тогда следует удостовериться, что вся внутренняя область параболы находится над осью x . Площадь S''_p вычисляется аналогично S_p с заменой координат (x_1, y_1) на (x_4, y_4) , а величина

$$S'_p = S'_{p1} - S'_{p2}, \quad (13)$$

где S'_{p1} – площадь под параболой, соответствующей поверхности ледника; S'_{p2} – площадь прямоугольного треугольника (см. рис. 2, θ).

Если вертикально переместить точку X_3 на ось x , то

$$y'_1 = y_1 - y_3; y'_2 = y_2 - y_3; y'_3 = 0; y'_4 = y'_4 - y_3; \quad (14)$$

$$F'(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_2)(x_4-x_3)} y'_4 + \frac{(x-x_4)(x-x_3)}{(x_2-x_4)(x_2-x_3)} y'_2; \quad (15)$$

$$S'_{p1} = \int_{x_3}^{x_2} F'(x) dx; \quad (16)$$

$$S'_{p2} = |0,5y'_2(x_2 - x_3)|. \quad (17)$$

Метод эллипсов. При аппроксимации сечения ледника эллипсом (см. рис. 2, ε) площадь сечения вычисляется по формулам

$$S = S_e + S'_e \quad (18a)$$

или

$$S = S_e - S''_e, \quad (18б)$$

где S_e – площадь сегмента полуэллипса, соответствующего ложу ледника; S'_e и S''_e – площадь сегмента эллипса, аппроксимирующего поверхность ледника при выпуклой и вогнутой поверхностях соответственно.

Далее центр координат переносится в точку X_0 с координатами (x_0, y_0) (см. рис. 2, δ); для этого выполняют следующие преобразования:

$$y'_1 = y_1 - y_0; y'_2 = y_2 - y_0; y'_3 = y_3 - y_0; \quad (19a)$$

$$x'_1 = x_1 - x_0; x'_2 = x_2 - x_0; x'_3 = x_3 - x_0, \quad (19б)$$

где

$$y_0 = y_2; x_0 = \frac{x_1^2 y_2^2 - x_1^2 y_3^2 - x_2^2 y_1^2 + x_2^2 y_3^2 + x_3^2 y_1^2 - x_3^2 y_2^2}{2x_1 y_2^2 - 2x_2 y_1^2 - 2x_1 y_3^2 + 2x_3 y_1^2 + 2x_2 y_3^2 - 2x_3 y_2^2}. \quad (20)$$

Затем определяют площадь сегмента полуэллипса S_e :

$$S_e = 0,5S_{e3} - 0,5S'_{e1} - S'_{e2}, \quad (21)$$

где S_{e3} – площадь эллипса, проходящего через точки X_1, X_2 и X_3 ; S'_{e1} – площадь сегмента эллипса, проходящего через точки X'_e, X''_e и X_3 ; S'_{e2} – площадь прямоугольного треугольника $X_2 X_3 X'_e$.

Параметры формулы (21) определяют следующим образом:

$$S_{e3} = \pi ab, \quad (22)$$

где

$$a = \frac{y_2^2 - \frac{y_1^2 x_2^2}{x_1^2}}{1 - \frac{x_2^2}{x_1^2}}; \quad (23)$$

$$b = \sqrt{\frac{x_1^2}{1 - y_1^2 a^{\frac{1}{2}}}}; \quad (24)$$

$$S'_{e1} = \frac{\pi ab}{2} + \frac{b}{a} \left(x'_3 \sqrt{a^2 - x_3'^2} + a^2 \arcsin \frac{x'_3}{a} \right); \quad (25)$$

$$S'_{e2} = |0,5y'_3(x'_3 - x'_2)|. \quad (26)$$

Площадь S''_e вычисляется аналогично S_e с заменой координат (x_1, y_1) на (x_4, y_4) , а площадь S'_e – аналогично S_e с заменой координат (x_1, y_1) на (x'_4, y'_4) , (x_2, y_2) – на (x_3, y_3) и (x_3, y_3) – на (x_2, y_2) (см. рис. 2, e).

Оценка объёма ледников вытянутой и изометрической форм. Применительно к ледникам вытянутой и изометрической форм, к которым ближе всего ледники долинного, карово-долинного и карового типов, для оценки точности этих двух методов мы использовали карты толщины ледников Марух (долинного типа) и Марушонок (карового типа) на Кавказе площадью 2,76 и 0,043 км² соответственно, построенные по данным площадной радиолокационной съёмки, выполненной в августе 2011 г. [7]. Для ледника Марух положение произвольно выбранного продольного профиля с известной толщиной льда, расчётных поперечных профилей (рис. 3, a) и рассчитанных вдоль них по формулам (4)–(17) параболических сечений поверхности и ложа показаны на рис. 3, $b, в$; разность измеренных и вычисленных высот поверхности и толщины льда приведена на рис. 3, $г, д$. В данном случае продольный профиль выбран нами произвольно, чтобы имитировать измерение толщины льда с воздушного транспорта. Для ледника Марушонок аналогичные данные отражены на рис. 4.

В обоих случаях расчётные поперечные профили проходили перпендикулярно продольному профилю. На леднике Марух расстояние между поперечными

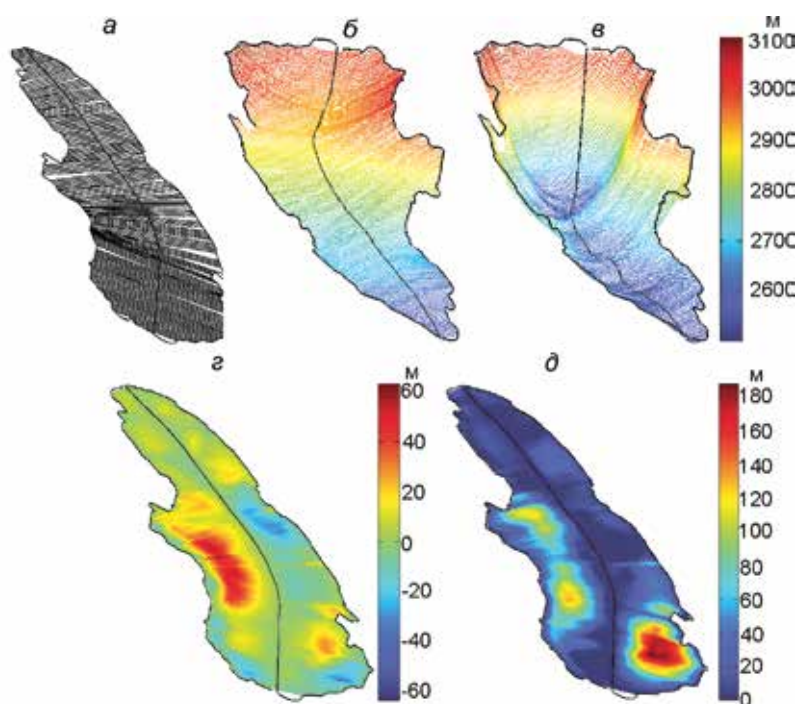


Рис. 3. Ледник Марух:

a – положение продольного профиля с измеренной высотой поверхности и толщиной льда и положение поперечных профилей, для которых методом парабол вычислены высоты поверхности (*б*) и ложа (*е*); разность измеренных и вычисленных методом парабол высот поверхности (*з*) и толщин льда (*д*)

Fig. 3. Marukh Glacier:

a – location of a longitudinal profile with glacier surface elevation and ice thickness measurements and cross-section profiles location, for which glacier surface (*b*) and bedrock (*e*) elevations were calculated using parabolas and ellipses methods; difference between measured and calculated using these methods glacier surface elevation (*z*) and ice thickness (*d*)

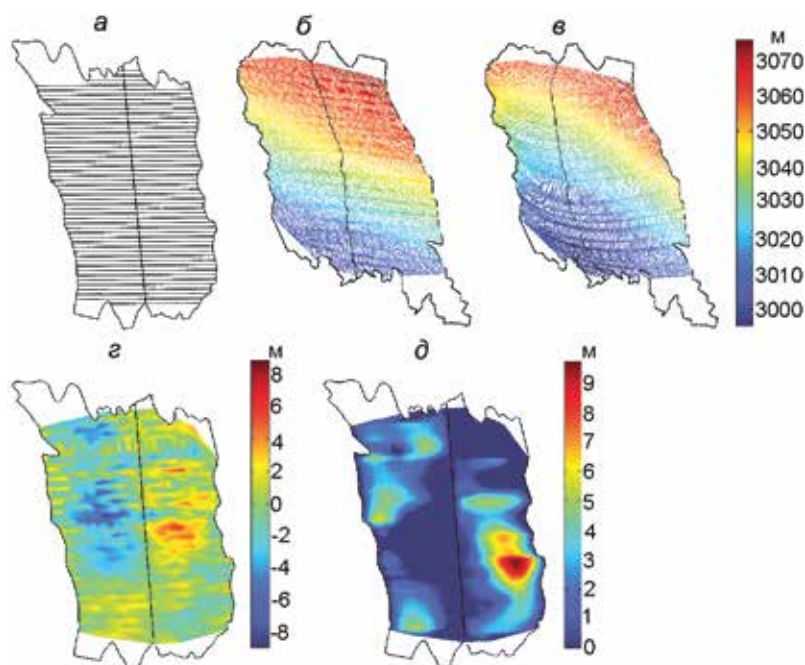


Рис. 4. Ледник Марушонок.

Условные обозначения см. рис. 3

Fig. 4. Marushonok Glacier.

Symbols refer to Fig. 3

профилями составляет около 23 м, на леднике Марушонок – около 14 м. Поскольку расчётные поперечные профили проходят под некоторыми углами к оси абсцисс, для упрощения расчётов положения поперечных сечений вдоль каждого из этих профилей вычислялись в новой прямоугольной системе координат, повернутой на соответствующий угол. Рассчитанные методом эллипсов по формулам (18)–(26) поперечные сечения поверхности и ложа ледников Марух и Марушонок

очень похожи на рассчитанные методом парабол (см. рис. 3, *б*, *е*; см. рис. 4, *б*, *е*) и поэтому здесь не приводятся. Для вычисления объёма этих двух ледников сначала выполнялась аппроксимация ложа и поверхности методом парабол или эллипсов вдоль полученных продольных профилей. Затем эти значения интерполировались по всей площади ледника для получения значений высоты ложа и поверхности в узлах регулярной сетки с шагом 1 м. В итоге объём вычислялся инте-

Таблица 1. Объём ледников Марух и Марушонок, вычисленный методами парабол (1), эллипсов (2) и Topo to Raster (3)

Ледник	Измеренный объём $V_{изм}$, км ³	Вычисленный объём $V_{выч}$, км ³			$V_{изм}/V_{выч}$		
		1	2	3	1	2	3
Марух	0,273	0,3633	0,4159	0,2728	1,3307	1,5233	0,9992
Марушонок	0,00051	0,00055	0,00067	0,000403	1,0784	1,3470	0,7902

гированием разностей высот поверхности и ложа по всей площади ледника с таким же шагом.

Из рис. 3, г, д следует, что наибольшие расхождения между измеренными и расчётными высотами поверхности и толщиной льда на леднике Марух достигают соответственно 30 и 180 м и относятся к участкам в его прибортовых частях. На леднике Марушонок эти расхождения гораздо меньше и в прибортовых участках не превышают ± 10 м. Вычисленные методами парабол и эллипсов объёмы ледников Марух и Марушонок приведены в табл. 1. Погрешность оценки объёма ледника Марух методом парабол и эллипсов равна соответственно 33 и 52%, ледника Марушонок – 8 и 35%. Оценка точности основана на данных всего по двум ледникам. Однако результаты согласуются с полученными ранее на примере ледников Шпицбергена, Полярного Урала и Джунгарского Алатау похожего типа [3, 18]. Учитывая сказанное, мы полагаем, что для оценки объёма ледников долинного и карового типа, имеющих вытянутую и изометрическую формы, для которых есть карты высоты поверхности и определены их границы и площадь, можно использовать данные радиозондирования по отдельным продольным профилям. При этом метод парабол обеспечивает приемлемую погрешность вычисления объёма ледников вытянутой и изометрической форм: для ледников Марух и Марушонок она равна соответственно 33 и 8%. Предыдущий опыт применения методов расчёта средней толщины льда и объёма отдельных ледников показал, что погрешность составляет в среднем $\pm 20 \div 30\%$ [34].

Мы вычислили также объёмы обоих ледников с использованием аппроксимации *Topo to Raster* ANUDEM [27] в программе ARCGIS, учитывающей гидрологическую корректность рельефа ложа – этот алгоритм «старается», по возможности, убрать все замкнутые котловины в рельефе дна долины, «чтобы дать воде возможность течь». Таким образом, в случае ледниковых долин, возможно, объёмы льда будут занижены, особенно если профилей измерений мало. Для ледника Марух ошибка измеренных и вычисленных этим способом объёмов льда составила менее 1%, а для ледника Марушонок – 21%. Следовательно, в рассмотренных случаях методы парабол и Topo to Raster дают лучшие оценки объёма, чем метод эллипсов. Но *a priori* предпочтение не может быть отдано ни одному из первых двух методов без дополнительных данных о форме подлёдной долины. Сравнительно большая ошибка оценки объёма ледника Марух методом парабол, вероятно, объясняется сложной топографией под-

лёдного ложа этого ледника и значительной толщиной льда (до 330 м) в области питания при относительно небольшой ширине ледника (около 1 км). В таких случаях предпочтение может быть отдано методу Topo to Raster.

Оценка объёма льда в горно-ледниковых системах

Уже отмечалось, что данные по объёму горных ледников весьма ограничены, тогда как сведения об их площади есть во многих базах данных и каталогах. Поэтому для оценки объёма льда в горно-ледниковых V^* системах было предложено несколько способов.

Формула Мазо–Глазырина. По этой формуле объём V^* долинного ледника оценивается на основе динамической модели стационарного ледника со средней величиной баланса массы 50 г/см^2 в области питания по формуле [9]

$$V^* = 1,63Sh_0/(1 + \Delta z/h_0)^{0,774}, \quad h_0 = 0,073L^{0,5}, \quad (27)$$

где S – площадь ледника, км²; L – длина ледника, км; Δz – разность высот между высшей и низшей точками открытой части ледника, км.

Сравнение объёмов ледников Джунгарского Алатау, рассчитанных по формуле (27) и методом эллипсов, показало возможность применения этого метода для ледников, площадью более 5 км^2 . В этом случае расхождение не превышало 20,6%, а среднеквадратическое отклонение составляет всего $\pm 6,1\%$ [13]. Лучшее совпадение получается, если в качестве высшей точки ледника принимать высоту бергшрунда, поскольку именно ниже него начинается движение ледника.

Формула САРНИГМИ. Другой способ предложен для оценки объёма V_g^* группы из N ледников общей площадью S_g [8] (формула САРНИГМИ):

$$V_g^* = c(S_g^2/N), \quad (28)$$

где $c = 0,04$.

Степенная функция. В основу формулы (28) положена корреляционная связь между объёмом V (км³) и площадью S (км²) ледников вида

$$V = kS^p \quad (29)$$

с коэффициентами $k = 0,027$ и $p = 1,5$, выведенными из данных измерений толщины долинных ледников Каврайского и Красовского в Джунгарском Алатау и ещё 28 ледников, для которых толщина льда была рассчитана методами Лагалли и балансов в предположении, что их поперечные профили имеют параболическую форму [2]. В результате дальнейших исследований установлено [4, 5, 12, 13], что величина коэффи-

Таблица 2. Связь между объёмом V и площадью S ледников Алтая и других районов горного оледенения в виде степенной функции $V = kS^p$

Ледники*	Число ледников N	k	p	Коэффициент детерминации r^2
<i>Ледники Алтая</i>				
Каровые (1)	27	0,048	1,222	0,864
Карово-долинные (2)	40	0,049	1,048	0,917
Долинные (3)	48	0,034	1,337	0,876
Плоских вершин и котловинные (4)	5	0,044	0,89	0,989
Все ледники Алтая (5)	121	0,037	1,304	0,905
<i>Ледники других районов горного оледенения</i>				
Ледники Альп, Свальбарда, Каскадных гор с минимальной (6) и максимальной (7) величиной коэффициента p	63	0,0285	$1,357 \pm 0,037$	0,96
Ледники Альп с минимальной (8) и максимальной (9) величиной коэффициента p	16	0,0161	$1,520 \pm 0,092$	0,95

*Цифры в скобках – номера ветвей на рис. 5.

коэффициентов k и p в формуле (29) зависит от многих факторов – морфологического типа ледников, их термического и динамического режимов (медленного или быстрого отступления или наступания), положения в горной стране. В разных районах горного оледенения она может изменяться в довольно широких пределах, поэтому и коэффициент c в формуле (28) также должен зависеть от названных факторов. Это подтвердилось при сравнении результатов оценок по формуле (29) с данными вычисления объёма ледников Шпицбергена методом парабол [4].

В Северо-, Южно-Чуйском и Катинском хребтах Алтая общая площадь 121 ледника $S_g = 269,75 \text{ км}^2$, общий измеренный их объём $V_g = 15,33 \text{ км}^3$, а вычисленный по формуле (28) объём $V_g^* = 24,05 \text{ км}^3$, т.е. в 1,57 раз больше, следовательно, коэффициент c в формуле (28) должен быть равен не 0,04, а около 0,025. На 2003 г. для всех ледников этих районов ($N = 730$) $S_g = 632,9 \text{ км}^2$, $V_g = 33,03 \text{ км}^3$ [14] и, согласно формуле (28), $V_g^* = 21,95 \text{ км}^3$ – в 1,505 раз больше измеренного, т.е. коэффициент c в формуле (28) должен быть равен приблизительно 0,027. Заметим, что величина этого коэффициента изменилась очень мало по сравнению с предыдущей оценкой для общего числа ледников ($N = 730$). Этот пример показывает, что для оценки запасов льда в крупных горноледниковых системах целесообразнее использовать формулу (29), но с другими, более подходящими для данной горной области коэффициентами k и p .

Из формулы (29) следует, что средняя толщина ледников

$$H_{\text{ср}} = kS^{p-1}, \quad (30)$$

а изменение объёма ледников ΔV в зависимости от изменения их площади ΔS составляет:

$$\Delta V = kS^{p-1}\Delta S. \quad (31)$$

Оценки показали, что для долинных ледников коэффициенты k и p в формуле (29) могут изменяться в широких пределах и во многих случаях заметно отличаться от $p = 1,375$, основанного на теоретических оценках [20]. Часто они могут отличаться от этого значения p на величину от -35 до $+40\%$ (от 0,95 до 2,00) [35] или на величину $\pm 1,25$ [38]. Похожий диапазон изменений коэффициента p показывают и данные по другим районам горного оледенения [22, 31]. Это относится и к коэффициенту k , который может изменяться от 0,016 до 0,048 [22]. В частности, для 63 ледников из разных районов горного оледенения (Альпы, Свальбард, Северная Америка) $k = 0,0285$, $p = 1,357$ (табл. 2).

Данные аэрофотоинтерпретации ледников Шпицбергена и Джунгарского Алатау вдоль их продольной оси показали [12, 13], что графики $V = f(S)$ имеют две хорошо различимые ветви. Для ледников Шпицбергена одна из них соответствует долинным и сетчатым ледникам с отрицательными формами подлёдного рельефа, другая – ледниковым куполам с положительными формами подлёдного рельефа. Эти ветви характеризуются разными коэффициентами k и p : для одной $k = 0,037$, $p = 1,357$; для другой $k = 0,041$, $p = 1,235$. Для ледников Джунгарского Алатау обе ветви также соответствуют ледникам разных морфологических типов: одна – висячим, шлейфовым и долинным ледникам, расположенным в глубине горных хребтов ($k = 0,0298$, $p = 1,379$); другая – висячим долинным, карово-долинным, шлейфовым, каровым, асимметричным каровым и карово-висячим ледникам, расположенным в верховьях притоков крупных рек ($k = 0,0298$, $p = 1,202$). Для ледников Алтая на графике $V = f(S)$ также видны четыре ветви с разными коэффициентами k и p (см. табл. 2), которые соответствуют каровым (ветвь 1), карово-долинным (ветвь 2), долинным (ветвь 3) и всей совокупности ледников (ветвь 5) (рис. 5).

Таблица 3. Измеренные V_{meas} и рассчитанные V_{calc} объёмы ледников Алтая разных морфологических типов

Ледники Алтая	Число ледников N	S , км ²	V_{meas} , км ³	V_{calc} , км ³	ΔV , км ³	ΔV , %
Каровые	27	19,44	0,916	0,924	0,008	0,87
Карово–долинные	41	52,18	2,598	2,611	0,013	0,5
Долинные	48	187,17	11,373	11,23	0,143	-1,2
Плоских вершин и котловинные	5	10,95	0,439	0,437	0,002	-0,45
Все ледники	121	269,75	15,326	14,835	0,491	-3,2
Все ледники (по корреляционной связи для Альп)*	121	269,75	15,326	9,075	6,251	-41

*Для сравнения в последней строке дан расчёт по корреляционной связи (формула 29) со средними коэффициентами k и p для Альп из табл. 2.

Заметим, что в данном случае коэффициент детерминации рассчитывался методом наименьших квадратов, а не путём стандартной операции определения тренда экспоненциальной функции в программе Microsoft Excel. Это объясняется тем, что в последнем случае

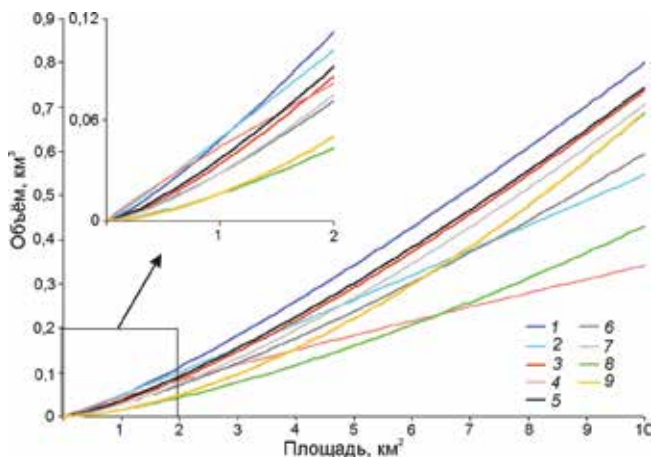


Рис. 5. Связь между объёмом V (км³) и площадью S (км²) ледников Алтая и других районов горного оледенения в виде степенной функции $V = kS^p$.

Ветвь 1 соответствует 27 каровым ледникам; ветвь 2 – 41 карово-долинным ледникам; ветвь 3 – 48 долинным ледникам; ветвь 4 – пяти ледникам плоских вершин и котловинным; ветвь 5 – всем 121 измеренным ледникам Алтая; ветви 6 и 7 – 63 ледникам из разных районов горного оледенения (Альпы, Свальбард, Северная Америка) [22] с минимальной 6 и максимальной 7 величиной коэффициента p ; ветви 8 и 9 – 16 ледникам Альп с минимальной 8 и максимальной 9 величиной коэффициента p [21, 22]. Обозначения ветвей и значения коэффициента p даны в табл. 2

Fig. 5. Relation between volume V (km³) and surface area S (km²) for Altay glaciers shown as volume-area scaling relation ($V = kS^p$) for:

27 cirque glaciers (branch 1), 41 cirque-valley glaciers (branch 2), 48 valley glaciers (branch 3), 5 flat summit and glaciers of depressions (branch 4), all 121 Altay glaciers (branch 5), 63 glaciers from different regions of mountain glaciation (Alps, Svalbard and North America) [22] with minimum (branch 6) and maximum (branch 7) values of coefficient p , 16 glaciers from Alps with minimum (branch 8) and maximum (branch 9) values of coefficient p [21, 22]. Marks of branches and values of coefficient p are given in Table 2

функция аппроксимируется в линейную путём логарифмирования, в результате чего в целом получают несколько отличные от первого метода значения коэффициентов k , p и r^2 . Для каровых и карово-долинных ледников (ветви 1 и 2) аппроксимирующая степенная функция (29) заметно отличается от таковой для всех исследованных ледников Алтая (ветвь 5), но ближе всего соответствует долинным ледникам (ветвь 3).

Несмотря на меньший коэффициент детерминации r^2 , расчёты для ледников ветвей 1 и 2 дают меньшие различия между измеренным V_{meas} и расчётным V_{calc} суммарным объёмом ледников Алтая, чем для ледников ветвей 3 и 4, и тем более меньшие различия, чем при использовании «глобальных» (для Альп, Свальбарда и Северной Америки) (ветви 6, 7) и «региональных» (для Альп) (ветви 8, 9) коэффициентов k и p из табл. 1 (табл. 3).

На основании табл. 2 и 3 и рис. 5 можно полагать, что для горно-ледниковой системы с похожим распределением ледников по площади и морфологическим типам измерения на долинных ледниках позволят получить степенную зависимость объёма от площади, наиболее близкую к общей зависимости для всех ледников. Приведённые данные показывают целесообразность использования региональных коэффициентов k и p для оценки запасов льда в разных горно-ледниковых системах, а также разделения ледников для такой оценки по преобладающим морфологическим типам. Последний вывод согласуется с полученными ранее данными для Джунгарского Алатау [13], хотя тогда использовались менее точные оценки объёма ледников методом эллипсов по данным аэrorадиозондирования вдоль их продольной оси. Это ещё раз указывает на целесообразность оценки запасов льда в крупных горно-ледниковых системах с использованием соотношений вида (29), полученных для конкретного района горного оледенения.

Зависимость точности оценки запасов льда в горно-ледниковой системе от количества и площади исследуемых ледников. Приведённые на рис. 1 данные по объёму 121 ледника Алтая использованы также для оценки количества ледников, которое могло бы обеспечить приемлемую точность определения общих запасов льда в горно-ледниковой системе. Для этого применялся статистический метод выборки. Описанная далее процеду-

ра выполнялась отдельно для каждого типа ледников (каровых, карово-долинных, долинных) и для всех ледников вместе. Для каждого целого значения n от 3 до N_t , равного общему числу ледников типа t , случайным образом выбирались n ледников. На основе известных данных о площади S и объёме V этих ледников определялась эмпирическая функциональная зависимость $V = f(S)$ объёма V от площади S вида (29). Коэффициенты k и p вычислялись методом нелинейной регрессии [1]. По данной зависимости вычислялась ошибка оценки суммарного объёма ледников в заданной выборке (для данного типа ледников t) как разность Δ между суммарным объёмом (данные измерений) и суммой оценок объёма ледников по полученной функциональной зависимости (29) в процентах от суммарного объёма:

$$\Delta = \frac{V_{est} - \sum_{i=1}^{N_t} V_i}{\sum_{i=1}^{N_t} V_i} 100\%, \quad (32)$$

где V_{est} – оценка объёма; V_i – измеренный объём i -го ледника.

Чтобы получить статистические оценки для среднего и разброса параметра Δ , использовался метод бутстреппинга [40]. Описанная процедура повторялась 1000 раз. Из тысячи результатов на каждом шаге были получены следующие статистические оценки: σ_{mean} , σ_5 , σ_{95} , соответствующие среднему, 5-й и 95-й процентилем в данной выборке соответственно. Эти результаты представлены на рис. 6. В основе этих вычислений лежит предположение, что вся выборка, состоящая из 121 ледника, представляет собой генеральную совокупность, т.е. она описывает оледенение Алтая в целом. Мы допускаем это предположение, так как указанная выборка – один из самых обширных массивов прямых измерений площади и объёма ледников в отдельно взятом регионе, но мы не распространяем полученные результаты на другие горные системы. Ставилась и другая задача: проверить, можно ли уменьшить ошибку расчёта объёма оледенения, если выбирать модельные ледники для построения зависимости (29) не случайным образом, а с учётом площади ледников.

Отличие от основного алгоритма состоит в том, что каждый раз выбирается n из N_t ледников типа t не случайным образом, а с дополнительными условиями: все ледники по площади разделены на восемь групп (0–0,4; 0,4–0,6; 0,6–1; 1–2; 2–3; 3–4; 4–6; 6–8; > 8 км²), и заполнение этих групп в выборке должно идти равномерно. Если количество ледников в какой-то группе недостаточно для конкретной выборки, то выбираются ледники из других групп. Таким образом, мы формируем случайную выборку, но равномерно распределённую по указанным группам (насколько это позволяют исходные данные). Анализ полученных результатов показал, что, несмотря на наши ожидания, применение такого

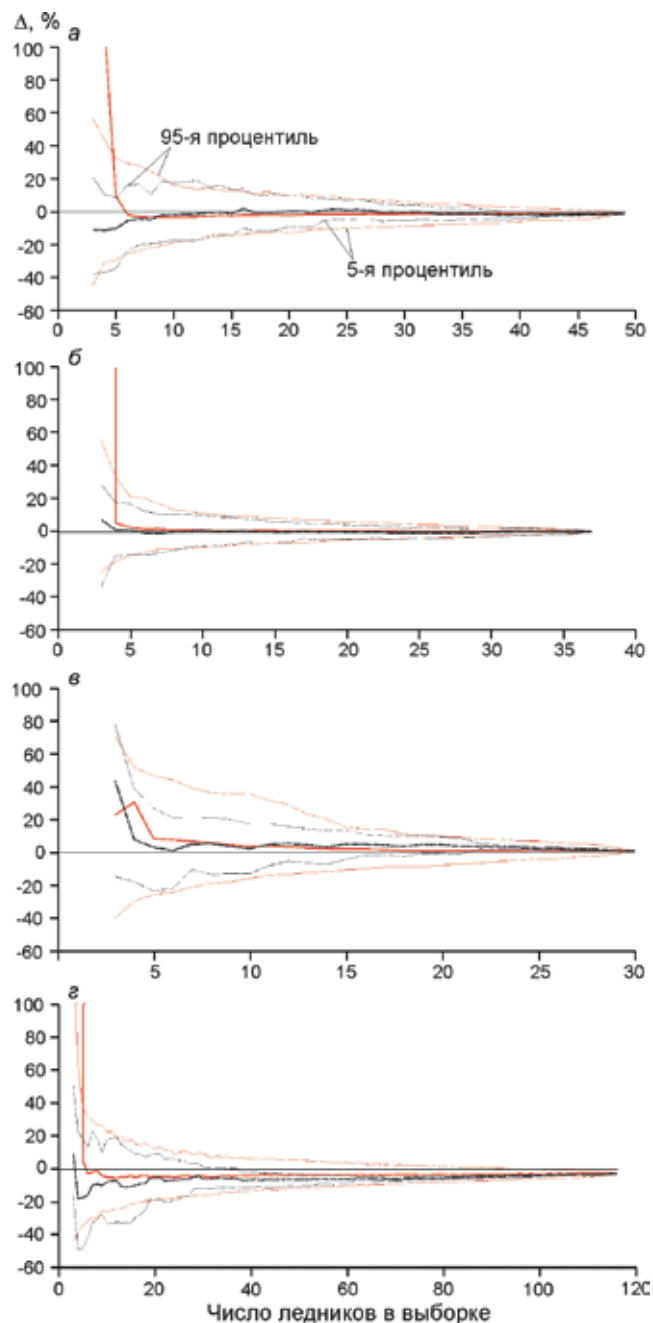


Рис. 6. Красным цветом показаны результаты вычислений при случайном выборе ледников. Чёрным пунктиром – при разбиении ледников на группы по размерам. Толстой линией показано среднее, тонкими линиями – разброс (5-я и 95-я процентиля) ошибки Δ оценки объёма ледников Алтая долинного (а), карово-долинного (б), карового типа (в) и всех ледников Алтая (г) по степенной зависимости (22), полученной для разного количества N ледников в выборке

Fig. 6. Results of calculations with random sampling showed in red. Results of calculations with sampling dependent on glacier size showed in dashed black. Bold line shows mean value, thin lines show of Altay glaciers volume spread (5th and 95th percentiles) of error Δ estimate for valley (a), cirque-valley (б), cirque (в) and all Altay glaciers (г) using relation (22), obtained for different numbers N of selected glaciers

подхода несильно повлияло на ошибку оценки суммарного объёма ледников (см. рис. 6). Разброс оценок объёма в результате разделения ледников на группы по размерам по сравнению со случайной выборкой заметно снижается лишь в том случае, когда число ледников превышает 25–30. При этом для всей совокупности ледников подобная процедура привела также к заниженным оценкам суммарного объёма, что, вероятно, связано с небольшим числом ледников площадью $> 8 \text{ км}^2$ в генеральной совокупности.

На рис. 6 видно, что при построении региональной зависимости уже по 5–10 ледникам ошибка оценки объёма всего оледенения в среднем не превышает 5–10%. При построении зависимости по 10–15 ледникам с вероятностью 90% ошибка находится в пределах $\pm 20\%$, а для карово-долинных ледников – даже в пределах $\pm 10\%$. Вообще, именно для карово-долинных ледников формула (29) даёт наилучшие результаты. Согласно рис. 6, оценка по формуле (29) завышает объёмы каровых и карово-долинных ледников, но занижает объёмы долинных ледников и всего оледенения. При этом результаты для отдельных морфологических типов ледников лучше, чем для всех ледников вместе, что подтверждает необходимость такого разделения. На это же указывает и ошибка оценки объёма оледенения по максимальному числу ледников каждого типа: для отдельных морфологических типов она не превышает 1%, а для всех ледников достигает 2,8%. При этом следует иметь в виду, что применение формулы (29) для оценки объёма отдельных ледников может давать большие ошибки (более 80%), поэтому использование её оправдано только для оценки запасов льда в крупных ледниковых системах.

Выводы

1. Статистические выкладки, полученные на примере ледников Алтая, показали, что для более достоверной оценки запасов льда в горно-ледниковой системе целесообразно использовать не «глобальную» зависимость между объёмом и площадью ледников, а региональную, учитывающую также морфологический тип ледников.

2. Для получения достаточно достоверной зависимости между объёмом и площадью ледников и, следовательно, более точной оценки запасов (суммарного объёма) льда в исследуемой горно-ледниковой системе можно ограничиться получением данных об их объёме на приемлемом для практических целей числе ледников преобладающих морфологических типов и размеров в данном районе горного оледенения (для Алтая 10–15). При этом ошибка оценки по 10–15 ледникам составляет менее 20%. Это намного меньше, чем при использовании «глобальной» зависимости ($p = 1,357$) или зависимостей, полученных для других регионов, например, для Альп ($p = 1,52$).

3. Приведённые на примере ледников Марух и Марушонок на Северном Кавказе оценки объёма этих

ледников по картам толщины льда и данным измерений толщины льда только вдоль центральной оси показали, что для ледников вытянутой и изометрической форм методы парабол и *Topo to Raster* дают приемлемую точность. Для ледника Марух различие измеренных и вычисленных этими методами объёмов не превышает 33 и 1% соответственно, для ледника Марушонок – 8 и 21%. Метод эллипсов даёт большие различия – 52% для ледника Марух и 35% для ледника Марушонок. Сравнительно большая ошибка оценки объёма ледника Марух методом парабол, вероятно, объясняется сложной топографией подлёдного ложа этого ледника и большой толщиной льда (до 330 м) в области питания при незначительной ширине ледника (около 1 км). В таких случаях предпочтение может быть отдано методу *Topo to Raster*.

Полученные в данной работе выводы могут быть использованы при выборе ледников для измерений толщины льда и объёма, а также для оценки запасов льда в крупной горно-ледниковой системе.

Благодарности. Авторы благодарят С.А. Никитина за предоставленные данные по площади и объёму ледников Алтая.

Работа выполнена с использованием гранта Президента РФ для поддержки молодых российских учёных кандидатов наук МК–875.2011.5 и гранта РФФИ № 11-05-00728-а.

Литература

1. Айвазян С.А., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д. Прикладная статистика: Исследование зависимостей. М.: Финансы и статистика, 1985. 488 с.
2. Ерасов Н.В. Метод определения объёма горных ледников // МГИ. 1968. Вып. 14. С. 307–308.
3. Журавлев А.Б. Определение объёма горных ледников по данным радиозондирования с вертолета // МГИ. 1980. Вып. 37. С. 140–148.
4. Журавлев А.Б. О зависимости между площадью и объёмом ледников // МГИ. 1981. Вып. 40. С. 262–265.
5. Журавлев А.Б. Корреляционный метод оценки запасов льда в ледниках // МГИ. 1985. Вып. 52. С. 241–249.
6. Кренке А.Н. Массообмен в ледниковых системах на территории СССР. Л.: Гидрометеиздат, 1982. 288 с.
7. Кутузов С.С., Лаврентьев И.И., Мачерет Ю.Я., Петраков Д.А. Изменения ледника Марух с 1945 по 2011 г. // Лёд и Снег. 2012. № 1 (117). С. 123–127.
8. Лихачева Л.И., Глазырин Г.Е., Щетинников А.С. Расчет суммарного объёма групп горных ледников (в защиту нашей формулы) // МГИ. 1981. Вып. 40. С. 256–262.
9. Мазо А.Б., Глазырин Г.Е. Метод расчета объёма стационарного горного ледника // Тр. САНИИ. 1986. Вып. 117 (198). С. 88–98.
10. Мачерет Ю.Я. Сейсмический метод в гляциологии: Итоги науки и техники. Гляциология. Т. 1. М.: изд. ВИНТИ, 1977. С. 41–86.
11. Мачерет Ю.Я. Радиозондирование ледников. М.: Научный мир, 2006. 389 с.

12. Мачерет Ю.Я., Журавлев А.Б., Боброва Л.И. Толщина, подледный рельеф и объём ледников Шпицбергена по данным радиолокационного зондирования // МГИ. 1984. Вып. 51. С. 59–62.
13. Мачерет Ю.Я., Черкасов П.А., Боброва Л.И. Толщина и объём ледников Джунгарского Алатау по данным аэро-радиозондирования // МГИ. 1988. Вып. 62. С. 59–71.
14. Никитин С.А. Закономерности распределения ледниковых ресурсов в Русском Алтае // МГИ. 2009. Вып. 107. С. 87–96.
15. Никитин С.А., Веснин А.В., Осипов А.В., Игловская Н.В. Результаты радиофизических исследований ледников Северо-Чуйского хребта на Алтае // МГИ. 1999. Вып. 87. С. 188–195.
16. Никитин С.А., Веснин А.В., Осипов А.В., Игловская Н.В. Результаты радиозондирования ледников Центрального Алтая (Северо-Чуйский и Южно-Чуйский хребты) // МГИ. 2000. Вып. 88. С. 145–148.
17. Никитин С.А., Веснин А.В., Осипов А.В., Игловская Н.В. Распределение запасов льда в Северо-Чуйском хребте Центрального Алтая по данным радиозондирования // МГИ. 2001. Вып. 90. С. 107–111.
18. Черкасов П.А., Никитин С.А. К методике расчета объема горных ледников по данным наземной и воздушной радиолокационной съемки // Ледники, снежный покров и лавины в горах Казахстана. Алма-Ата, 1999. С. 18–36.
19. Bahr D.B., Dyurgerov M.B. Characteristic mass-balance scaling with valley glacier size // Journ. of Glaciology. 1999. V. 45. № 149. P. 17–21.
20. Bahr D.B., Meier M.F., Peckham S.D. The physical basis volume–area scaling // Journ. of Geophys. Research. 1997. V. 102 (B9). P. 20355–20362.
21. Brückl E. Eine Methode zur Volumenbestimmung von Gletschern auf Grand der Plastizitätstheorie // Archiv für Meteorologie, Geophysik und Bioklimatologie. 1970. Ser. A. 19. P. 317–328.
22. Chen J., Ohmura A. Estimation of Alpine glacier water resources and their change since the 1870s // IAHS Publ. № 193. 1990. P. 125–135.
23. Dyurgerov M.B., Meier M.F. Glaciers and the Changing Earth System: A 2004 Snapshot. Institute of Arctic and Alpine Research, Occasional Paper № 58. Boulder: University of Colorado, 2005. 117 p.
24. Farinotti D., Huss M., Bauder A., Funk M. A method to estimate the ice volume and ice–thickness distribution of alpine glaciers // Journ. of Glaciology. 2009. V. 55. № 191. P. 422–430.
25. Fischer A. Calculation of glacier volume from sparse ice-thickness data, applied to Schaufelferner, Austria // Journ. of Glaciology. 2009. V. 55. № 191. P. 453–460.
26. Fischer A., Abermann J., Kuhn M. On the accuracy of estimating the potential sea level rise by scaling the area of mountain glaciers // Geophys. Research Abstracts. 2012. V. 14. P. 6524.
27. Hutchinson M.F. A new procedure for gridding elevation and stream line data with automatic removal of spurious pits // Journ. of Hydrology 1989. № 106. P. 211–232.
28. Jacob T., Wahr J., Pfeffer W.T., Swenson S. Recent contributions of glaciers and ice caps to sea level rise // Nature. 2012. V. 482. P. 514.
29. Lambrecht A., Kuhn M. Glacier changes in the Austrian Alps during the last three decades, derived from the new Austrian glacier inventory // Annals of Glaciology. 2007. V. 46. P. 177–184.
30. Lecklercq P.W., Oerlemans J., Gogley J.G. Estimating the glacier contribution to sea-level rise // Surv. Geophys. 2011. V. 32. P. 519–535.
31. Meier M.F., Bahr D.B. Counting glaciers: use of scaling methods to estimate the number and size distribution of the glaciers of the world. Ice sheets and volcanoes: a tributary to Mark F. Meier. CREEL Special Report 96–27, 1996. P. 89–94.
32. Meier M.F., Dyurgerov M.B., Rick U.K., O’Neel S., Pfeffer W.T., Anderson R.S., Anderson S.P., Glazovsky A.F. Glaciers dominate eustatic sea level rise in the 21st century // Science. 2007. V. 317. № 5841. P. 1064–1067.
33. Möller M., Schneider C. Calibration of glacier–volume–area relations from surface extent fluctuations and application to future glacier change // Journ. of Glaciology. 2010. V. 56. № 195. P. 33–40.
34. Paul F., Linsbauer A. Modeling of glacier bed topography from glacier outlines, central branch lines and a DEM // Intern. Journ. of Geographical Inform. Science. <http://dx.doi.org/10.1080/13658816.2011.627859>. 2012.
35. Radič V., Hock R., Oerlemans J. Analysis of scaling methods in deriving future volume evolutions of valley glaciers // Journ. of Glaciology. 2008. V. 54. № 187. P. 601–611.
36. Sverissson H. Is the cross–section of a glacial valley a parabola? // Journ. of Glaciology. 1959 V. 3. P. 362–363.
37. Trabant D.C., Hawkins D.B. Glacier Ice-volume modeling and glacier volumes on Redoubt volcano, Alaska. U.S. Geological Survey. Water-Resources Investigations Report 97-4187. Fairbanks, Alaska, 1997.
38. Van de Wal R.S.M., Wild M. Modelling response of glaciers to climate change by applying volume–area scaling in combination with a high resolution CSM // Climate Dynamics. 2001. V. 18. № 3–4. P. 369–366.
39. WGMS and NSIDC World glacier inventory. Compiled and made available by the World Glacier Monitoring Service, Zurich, Switzerland, and the National Snow and Ice Data Center, Boulder CO, USA. Digital media. 1989, updated 2012. http://nsidc.org/data/glacier_inventory/
40. Wu C.F.J. Jackknife, bootstrap and other resampling methods in regression analysis (with discussions) // Annals of Statistics. 1986. V. 14. P. 1261–1350 (with discussions).

Summary

Volume (V) – area (S) scaling approach ($V = kS^p$, where V and S are obtained from direct measurements) is widely used for ice storage assessments in glacier-mountain systems. Accuracy of this approach was tested using surface area and volume dataset for 121 glaciers of different morphological type and sizes in Altay Mountains. It is shown that to increase total volume estimation accuracy, the coefficients k and p should be calculated for dominant morphological glacier types in the given region. Volume assessments for individual glaciers can be done using limited ice thickness data along the longitudinal profile. For two glaciers in Caucasus volume was calculated using parabolic and Topo to Raster approximation for cross section profiles of their surface and bedrock with acceptable accuracy (from 1 to 33%). It is also shown that ice-thickness data for 10–15 glaciers of dominant morphological type is enough for adequate estimation of the total ice storage in given mountain system with error less than 20%.