

Палеогляциология

УДК 551.324

doi:10.15356/2076-6734-2015-2-103-122

Современное прочтение истории ледниковых циклов плейстоцена

© 2015 г. В.М. Котляков¹, Д.М. Сонечкин²¹Институт географии РАН, Москва; ²Институт океанологии имени П.П. Ширшова РАН, Москва
dsonech@ocean.ru

A modern interpretation of the history of the Pleistocene glacial cycles

V.M. Kotlyakov¹, D.M. Sonechkin²¹Institute of Geography, Russian Academy of Sciences, Moscow; ²Shirshov Oceanology Institute, Russian Academy of Sciences, Moscow

Статья принята к печати 25 февраля 2015 г.

*Ледниковые циклы плейстоцена, теория Миланковича, теория нелинейных динамических систем, странный нехаотический аттрактор.
Milankovitch theory, Pleistocene glacial cycles, strange nonchaotic attractor, theory of the nonlinear dynamical systems.*

Гляциологические описания Гренландии и Антарктиды — одни из наиболее выдающихся событий в географических исследованиях Земли XX в. Эти описания показали, что покровные оледенения, следы которых обнаружены в Европе и Северной Америке ещё в первой половине XIX в., возникали и исчезали в плейстоцене многократно и при этом были синхронными с разрастаниями и сокращениями Антарктического ледникового щита. Последующие анализы донных океанических отложений подтвердили факт синхронности и позволили установить, что по продолжительности (порядка 100 тыс. лет) плейстоценовые ледниковые циклы были существенно больше примерно 40-тысячелетних чередований потеплений и похолоданий климата в предшествующем плиоцене. В данной статье с помощью вейвлетного анализа и методами теории нелинейных динамических систем сравниваются структуры плейстоценовых и плиоценовых циклических вариаций климата и устанавливаются механизмы, ответственные за их возбуждение и эволюцию.

The glaciological description of Greenland and Antarctica were among the most outstanding events in the geographical investigations of the Earth, made in the 20th century. They have shown that glaciations, traces of which were found in Europe and North America in the first half of the 19th century, waxed and waned during the Pleistocene repeatedly and were synchronous with the expansions and reductions of the Antarctic ice sheet. Further analyses of the sea-bed sediments confirmed the fact of such synchronicity, and revealed that the durations of the Pleistocene glacial cycles (on the order of one hundred thousand years) were significantly longer than approximately forty thousand years alternations of the warm and cold climate conditions during the preceding Pliocene. In this paper, using wavelets, and methods of the theory of the nonlinear dynamical systems, patterns of the Pleistocene's and Pliocene's cyclic variations of climate are compared with each other, to understand the mechanisms which can be responsible for their excitation and evolution.

Сокращение и аббревиатуры

До нашего времени — до н.вр.

КВП — комплексное вейвлетное преобразование.

ОВП — обратное вейвлетное преобразование.

СНА — странный нехаотический аттрактор.

СХА — странный хаотический аттрактор.

Введение

В своих пионерных исследованиях Л. Агассис [23] и его последователи ещё в первой половине XIX в. пришли к заключению, что в течение последних десятков и сотен тысяч лет в Европе и Северной Америке существовали обширные покровные оледенения, которые то разрастались, то сокращались. С тех пор представление о присутствии в плейстоцене длительных ледниковых периодов стало общепринятым. Во

второй половине XIX в. Дж. Кролль [27] предположил, что наличию этих ледниковых периодов способствовали очень холодные зимы, случавшиеся при длительных снижениях приходящей к приполярным областям Земли солнечной радиации. Такие уменьшения происходили на определённых фазах квазипериодических изменений эксцентриситета земной орбиты и наклона оси вращения Земли к плоскости эклиптики. В начале XX в. М. Миланкович [14] предложил альтернативное объяснение: покровные оледенения разрастались, когда зимы были мягкими и снежными, а летние периоды — прохладными. Он произвёл расчёт вариаций инсоляции на 65° с.ш., которую посчитал наиболее индикативной для характеристики сезонов там, где возникали покровные оледенения, и сопоставил эти расчёты с имевшимися фактическими данными об оледенениях в Европе и Северной Америке.

Разрастания ледников оказались одновременными с рассчитанными уменьшениями инсоляции.

История открытия покровных оледенений в Северном полушарии и становления орбитальной теории Миланковича популярно изложена в переведённой на русский язык книге Д. Имбри и К.П. Имбри [11]. Д. Имбри — математик по образованию — был привлечён известными американскими палеоклиматологами Н.Дж. Шеклтоном и Дж.Д. Хейсом [35] для объяснения механизма отклика климатической системы на вариации инсоляции. В последующем расчёты инсоляции для временных интервалов в несколько десятков миллионов лет в прошлом и ожидаемых в будущем делали многие учёные. Один из первых таких расчётов, который долгое время считался наиболее точным, был выполнен советскими астрономами Ш.Г. Шараф и Н.А. Будниковой [20–22] по инициативе А.С. Мониной, который, среди многих других проблем геофизики, интересовался происхождением плейстоценовых ледниковых циклов [15]. Заметим, что первая зарубежная сводка основных периодичностей, свойственных элементам земной орбиты (прецессии, наклонению и эксцентриситету), на основе которой потом делались расчёты вариаций инсоляции в геологическом масштабе времени, была опубликована бельгийским геофизиком А. Берже [24] только через девять лет после публикаций Шараф и Будниковой. В публикации Берже работа советских астрономов была упомянута, но мельком, как нечто малосущественное, а в последующих зарубежных публикациях упоминание вообще исчезло (см., например, [25]).

Отметим, что в публикации [24] имеется опечатка: длительность одного из главных периодов эксцентриситета в 2035441 год указана как 2305441. Насколько нам известно, сам Берже указал на эту опечатку в одном из малоизвестных бельгийских изданий, но никогда не упоминал о ней в своих многочисленных англоязычных статьях. Никто из многих зарубежных палеоклиматологов, ссылавшихся на работу Берже, так и не узнал об этой опечатке. Например, она воспроизведена в широко известной работе [32].

Подробный обзор всех имеющихся к настоящему времени расчётов инсоляции в геологическом масштабе времени недавно опубликован в интернете В.М. Федоровым [19]. Как современ-

ное продолжение работ по исследованию связей между инсоляцией и климатом упомянем статьи И.И. Смульского [17] и П. Хайберса [36]. В первой из них сформулирован ряд критических замечаний к ранее опубликованным инсоляционным расчётам и их использованию при объяснении природы ледниковых циклов. Из второй статьи следует, что основная периодичность инсоляции, если интересоваться её «эффективными» суммами за тёплое полугодие, способствующими таянию ледников, — это та, которая связана с главным 41-тысячелетним циклом наклонения. Ранее же (после работы Миланковича) считалось, что основная — та периодичность инсоляции, которая связана с 19–23-тысячелетними циклами прецессии. Работа Хайберса существенно поспособствовала решению одной из важнейших проблем орбитальной теории Миланковича: почему разрастания и отступания ледников происходили в обоих полушариях синхронно? В целом можно констатировать, что вопрос о характере инсоляционных воздействий на глобальную климатическую систему к настоящему времени изучен довольно хорошо.

Миланкович в своих исследованиях ледниковых циклов опирался почти исключительно на геоморфологические признаки распространения покровных оледенений на территории Европы и Северной Америки в период позднего плейстоцена, т.е. за 200–400 тыс. лет до нашего времени (далее: до н.вр.). Однако во второй половине XX в. палеоклиматологи получили в своё распоряжение совершенно новые данные о ледниковых циклах не только в Северном, но и в Южном полушариях Земли. Эти данные были основаны на специально разработанных геохимических анализах различных косвенных палеоклиматических индикаторов, в частности содержания изотопов кислорода в ледниковых кернах и в останках морских организмов, законсервированных в донных отложениях океанов и морей. Важнейшую роль в получении этих данных сыграли гляциологические исследования современных ледниковых щитов Гренландии (а также Земли Франца-Иосифа, Шпицбергена и др.) и особенно Антарктиды [12, 13, 28, 31, 41, 52]. Чуть позднее огромный вклад внесли данные бурения донных отложений океанов, полученные в рамках Международной программы ODP (Ocean Drilling Programme).

К концу XX в. палеоклиматологи имели довольно чёткую картину того, когда и как происходили разрастания и сокращения покровных оледенений в Северном и Южном полушариях Земли. Был установлен ряд важнейших факторов.

1. Чередование относительно холодных и относительно тёплых климатических условий происходило не только в течение последних 200–400 тыс. лет, но и в раннем плейстоцене и даже во всём плиоцене, т.е. оно охватывало временной интервал, по крайней мере, последних 5–6 млн лет.

2. Это чередование было синхронным в Северном и Южном полушариях.

3. Циклы относительно холодного, а затем тёплого климата в плиоцене имели периоды около 40 тыс. лет, а в плейстоцене — порядка 100 тыс. лет. Амплитуды плейстоценовых циклов были существенно больше плиоценовых, особенно у самых недавних четырёх циклов. При этом переход от плиоценовых циклов к плейстоценовым, обычно называемый среднеплейстоценовым переходом (the Mid-Pleistocene transition), был довольно резким.

4. Четыре самых недавних ледниковых цикла имели характерную пилообразную форму, т.е. похолодание у них происходило медленно и неравномерно, а потепление наступало скачкообразно.

5. Климат в плиоцене был в целом теплее, чем в плейстоцене, поскольку в течение последних нескольких миллионов лет имел место общий тренд похолодания.

6. В энергетических спектрах палеоклиматических индексов, характеризующих ледниковые циклы, имеются те же самые пики спектральной плотности, что и в спектрах характеристик земной орбиты (прецессии, наклона и эксцентриситета). Исключение составляет только самый мощный пик в спектре наклона на периоде около 412 тыс. лет, который до сих пор не обнаружен в палеоклиматических рядах и спектрах.

Ранние объяснения ледниковых циклов плейстоцена

Аддитивные модели отклика климатической системы на вариации инсоляции. Огромный объём фактических данных о временной ритмичности и структурных особенностях ледниковых циклов плейстоцена, накопленный ко вто-

рой половине XX в., потребовал осмысления и создания математических моделей, способных объяснить и воспроизвести факты, перечисленные выше. Первой была крайне простая модель Н. Кальдера [26]:

$$\frac{dV(t)}{dt} = -k(i(t) - i_0). \quad (1)$$

В (1) $V(t)$ — объём льда в глобальной климатической системе в момент времени t ; $i(t)$ — инсоляция в тот же момент времени; i_0 — некоторая искусственно подбираемая константа, критическая для разрастания или сокращения ледниковых щитов. Коэффициент $k = k_m$, если $i > i_0$ и $k = k_a$, если $i \leq i_0$; причём $k_m > k_a$ служит для описания приспособления климатической системы к меняющейся инсоляции. Наложено также ограничение, что величина $V(t)$ может варьировать только от нуля (Земля без ледников) до единицы (Земля, полностью покрытая льдом). Таким образом, модель (1) является кусочно-линейной и квазипериодическое внешнее воздействие на динамику оледенения рассматривается как аддитивная внешняя сила, реакция на которую различна на стадиях разрастания и сокращения ледниковых щитов.

Подобрав числовые значения для вышеупомянутых параметров модели, Кальдер смог построить временной ряд с 33 циклами изменений $V(t)$ для интервала последних 800 тыс. лет до н.в. Это число циклов — такое же, как в построенных к тому времени палеоклиматических рядах, относящихся к тому же временному интервалу. Были также правильно смоделированы моменты наступления всех девяти терминаций (переходов от ледникового климата к межледниковьям). Кроме того, энергетический спектр модельного ряда имел главные пики на периодах около 41, 23 и 19 тыс. лет, что хорошо соответствовало пикам в энергетическом спектре реального изотопного ряда. Правда, имелось одно несоответствие: в модельном спектре пик на периоде около 100 тыс. лет был гораздо более слабым, чем в спектрах реальных палеоклиматических рядов. Кальдеру не удалось воспроизвести пилообразную форму реальных ледниковых циклов, ибо все 33 модельных цикла имели один и тот же размах колебаний $V(t)$ (грубо говоря, от нуля до единицы), поэтому в общем модельный и реальный ряды оказались совершенно не

похожи друг на друга. Казалось бы, эта непохожесть означает полный неуспех работы Кальдера. Однако многие из моделей ледниковых циклов, предложенных позже, не были успешны даже в том, чего удалось достигнуть Кальдеру. Поэтому главным упрёком к его модели остаётся то, что она, как говорят математики, структурно неустойчива, а именно: даже очень малые отклонения от подобранных Кальдером значений параметров (i_0 , k_m , k_a) приводят при интегрировании уравнения (1) к сильно различающимся и совершенно нереалистическим решениям. Какие же значения параметров правильны, решить невозможно.

С целью добиться структурной устойчивости Дж. и Дж. Ц. Имбри [38] привели кусочно-линейную аддитивную модель к виду

$$\frac{dV(t)}{dt} = -k(V(t) - i(t)). \quad (2)$$

Здесь роль порогового значения инсоляции, переключающего процесс от накопления к таянию льда и обратно, играет разность $V(t) - i(t)$. Эта новая модель отчасти позволила воспроизвести пилообразную форму двух самых недавних ледниковых циклов и общее число ледниковых циклов за 800 тыс. лет. Энергетический спектр модельного ряда воспроизвёл пик на периоде 100 тыс. лет лучше, чем спектр модели Кальдера. Однако общая форма модельного ряда по-прежнему осталась непохожей на форму реального ряда. Особенно плохо были воспроизведены переходы к межледниковьям в середине рассматривавшегося интервала времени. Кроме того, самый главный пик модельного энергетического спектра оказался на периоде в 400 тыс. лет, чего нет ни в реальности, ни даже в модели Кальдера.

В последующем многие палеоклиматологи пытались получить более реалистические решения с моделями типа (1) и (2), добавляя в их правые части случайный шум, который имитирует воздействия на «медленную» динамику ледниковых циклов более высокочастотных климатических процессов. Оправданием для этого служило, в частности, то, что вклад всех известных спектральных пиков в общую изменчивость палеоклиматических рядов кажется небольшим по сравнению с вкладом непрерывного основания палеоклиматических спектров, которое форми-

руется главным образом высокочастотными климатическими процессами (см., например, [65]).

Среди разновидностей аддитивных моделей были те, которые предполагали, что климатическая система имеет два разных стационарных состояния: одно соответствует ледниковому климату, другое — межледниковью. Примеры такого рода моделей описаны, например, в [45, 50]. В данных моделях предполагалось, что каждое из стационарных состояний устойчиво. Это означает, что все состояния, отличающиеся от какого-то стационарного состояния не очень сильно со временем меняются таким образом, чтобы приблизиться к этому состоянию. Однако область фазового пространства, к которой принадлежат все такие нестационарные состояния, ограничена некоторой окрестностью рассматриваемого стационарного состояния. Все же нестационарные состояния, не принадлежащие к этой области, стремятся со временем к другому стационарному состоянию. Предполагалось, что граница между областями притяжения обоих стационарных состояний меняется со временем в зависимости от величины инсоляционного воздействия. Случайный шум в правых частях подобных моделей имитировал высокочастотные климатические процессы. Этот шум приводил к случайным «перескокам» текущего состояния климатической системы между областями притяжения обоих стационарных состояний, что и вызывало чередование ледниковий и межледниковий. Явление такого «перескока» было названо стохастическим резонансом [63].

Все модели подобного рода можно отнести к типу моделей так называемого броуновского движения, известного в статистической физике. Свойство структурной неустойчивости, т.е. чувствительной зависимости броуновского движения от параметров моделей, служит их необходимым специфическим свойством. Именно это свойство позволяет воспроизвести «случайность» броуновского движения отдельных мелких частиц в «жидкости», состоящей из множества таких частиц. Но это же свойство оказывается непреодолимым препятствием, если цель состоит в предсказании будущего поведения моделируемой системы. Поэтому использовать модели типа броуновского движения в задачах, где предсказание будущего поведения рассматриваемой динамической системы — конечная цель, не следует.

Мультипликативные модели отклика климатической системы на вариации инсоляции. Более тщательное рассмотрение особенностей эволюции ледниковых циклов по палеоклиматическим рядам привело к мультипликативным моделям ледниковых циклов. Среди них привлекла внимание тщательной математической проработкой модель Дж. Райеля. Вычисляя энергетический спектр палеоклиматических колебаний за последний миллион лет с помощью скользящего «окна» шириной 350 тыс. лет, Райель обнаружил (см. [54, 57]), что главный пик спектральной плотности палеоклиматических колебаний сначала (во время самого недавнего ледникового цикла) приходился на период около 120 тыс. лет, затем он смещался на период около 80 тыс., возвращался к 120 тыс. и, наконец, смещался на период в 80 тыс. лет примерно за 800 тыс. лет до н.вр. Взятые в целом, эти смещения выглядели как синусоида с периодом порядка 400 тыс. лет, что соответствует самой мощной периодичности эксцентриситета земной орбиты (413 тыс. лет). Далее (в ещё более отдалённом прошлом) картина смещений положения пика спектральной плотности по масштабам становилась очень нечёткой, если не отсутствующей (см. рис. 1В в статье [54]). Однако Райель предположил, что описанное синусоидальное смещение продолжалось в течение двух последних миллионов лет до н.вр. Он нашёл, что все пики в энергетическом спектре палеоклиматических колебаний, относящиеся к диапазону временных колебаний эксцентриситета земной орбиты (примерно от 50 до 200 тыс. лет), можно воспроизвести с помощью модели

$$\frac{d^2 L(t)}{dt^2} = -\Omega^2 [1 + 2(\Delta\Omega/\Omega)\cos\omega t] L(t). \quad (3)$$

В этой модели L характеризует распространение покровного оледенения от полюсов в сторону экватора. Модель (3) — это разновидность известного в радиофизике осциллятора Матвея, колебания в котором поддерживаются за счёт резонанса при мультипликативном воздействии на осциллятор периодической внешней силы. Это называется частотной модуляцией, где Ω — несущая, а ω — модулирующая частота. Оказалось, что все пики в диапазоне масштабов эксцентриситета земной орбиты, видимые в энергетических спектрах палеокли-

матических колебаний, можно особенно хорошо воспроизвести, если принять существующими сразу три несущих частоты: $\Omega_1 = 2\pi/95$; $\Omega_2 = 2\pi/100$; $\Omega_3 = 2\pi/125$; (единица измерения — 1 тыс. лет). Эти частоты соответствуют второй, четвёртой и третьей по мощности периодичностям эксцентриситета (см. сводку орбитальных периодичностей в [24]). В качестве модулирующих частот при этом надо использовать частоту самой мощной (первой) периодичности эксцентриситета $\omega = 2\pi/413$ и её первую субгармонику $\omega = 2\pi/826$. Тогда общее решение уравнения (3) получается в следующем виде:

$$L(t) = a \sin[2\pi t/95 + \varepsilon \sin(2\pi t/413) + \varepsilon' \sin(2\pi t/826)] + b \sin[2\pi t/100 + \varepsilon \sin(2\pi t/413)] + c \sin[2\pi t/125 + \varepsilon \sin(2\pi t/413)]. \quad (4)$$

Формула (4) хорошо воспроизводит вышеуказанную часть энергетического спектра палеоклиматических колебаний, если коэффициенты разложения a , b , c подобраны методом наименьших квадратов для каждого палеоклиматического ряда по отдельности (типично a втрое больше, чем b и c). Индексы модуляции ε и ε' во всех случаях равны примерно единице и двойке. Заметим, что в более поздней публикации [55] была добавлена модуляция самих модулирующих частот (вторичная модуляция). Это, вроде бы, позволило ещё лучше воспроизвести энергетические спектры некоторых реальных палеоклиматических рядов. Однако малая общая длина реальных рядов, при том, что число подбираемых модулирующих частот велико, позволяет предположить искусственную подгонку результатов к реальности — так называемый *overfitting*.

Таким образом, с помощью модели мультипликативного воздействия орбитальных изменений инсоляции на климатическую систему удалось хорошо воспроизвести часть спектра палеоклиматических колебаний, относящуюся к диапазону масштабов эксцентриситета. В том числе удалось неявно объяснить, почему самая мощная периодичность эксцентриситета в 413 тыс. лет не видна в палеоклиматических рядах. Однако в работах [54, 55, 57] нет объяснения, как эта и другие периодичности эксцентриситета могут непосредственно воздействовать на ледниковые циклы. При попытке получить такое объяснения следует учесть, что в радиотехнических системах, использующих частотную

модуляцию, несущая частота обычно служит собственной частотой системы, а модулирующая частота навязывается извне. В случае же модели (3) и несущие, и модулирующие частоты – внешние для климатической системы. Поэтому скорее можно было бы надеяться получить с помощью (3) описание вариаций инсоляции, а не вариаций распространения покровных оледенений. Но картины вейвлетных преобразований (см., например, [10, 43]), которые служат надёжным средством распознавания наличия частотной модуляции, не показывают никакой частотной модуляции у временных рядов инсоляции. Имеется только амплитудная модуляция.

Попытка показать, как амплитудная модуляция гармоник инсоляции может трансформироваться в частотную модуляцию динамики ледниковых циклов, была предпринята в работе [56]. Для этого использована так называемая логистическая модель, известная в математической биологии [34, 49]. Она была усложнена введением запаздывающего аргумента, что также представляет собой известный приём формального обеспечения цикличности изучаемой динамики. В итоге модель приняла следующий вид:

$$\frac{dL(t)}{dt} = \mu L(t - \tau) \left[1 - \frac{L(t - \tau)}{K(t)} \right], \quad (5)$$

где τ – запаздывание во времени; μ – интенсивность релаксации ледникового щита к равновесному состоянию.

Инсоляционное воздействие на климатическую систему было записано в виде суммы гармоник, модулированных по амплитуде

$$\varepsilon_0 \left\{ 1 + \sum_{i=1}^N a_i \cos s(\omega_i t + \varphi_i) \right\}. \text{ К этому инсоляционному воздействию были добавлены все другие возможные силы, обозначенные как } \varphi_i(t).$$

В итоге получилось воздействие в виде

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \left\{ 1 + \sum_{i=1}^N a_i \cos s(\omega_i t + \varphi_i) \right\} + \varphi_i(t). \text{ Оно было}$$

введено в (5) посредством функции чувствительности ледникового покрова к средней глобальной температуре климатической системы $K(t) = 1 + \varepsilon(t)T(t)$. Уравнение временной эволюции самой средней глобальной температуры было записано в виде, зависящем от текущего состояния оледенения:

$$C \frac{dT(t)}{dt} = Q[1 - \alpha(L)] - [A + BT(t)]. \quad (6)$$

При некоторых значениях параметров решение системы уравнений (5) и (6) оказалось периодическим по времени и синхронным с периодическим инсоляционным воздействием. Например, при τ равном 24 тыс. лет и μ примерно равном $1/14$ тыс. обратных лет период решения оказался близок к 95 тыс. лет. Причём, если $\tau < 1/\mu$, то форма периодического решения оказалась близка к синусоиде; если же $\tau > 1/\mu$, то она принимала иную форму, близкую к пилообразной форме реальных ледниковых циклов плейстоцена. Для этого потребовалось, чтобы произведение $\tau\mu$ превышало величину $\pi/2$.

Чтобы воспроизвести переход от относительно коротких (примерно 40 тыс. лет) плиоценовых циклов к относительно долгим ледниковым циклам плейстоцена, неинсоляционные внешние воздействия на климатическую систему были конкретизированы в работе [55] в виде $\varphi(t) = \varepsilon_1(1 - \varepsilon_2 \tan[\eta(t - t_0)])$, где ε_1 , ε_2 , η – некоторые подгоночные параметры. Когда эти параметры были подобраны надлежащим образом, то оказалось, что $\varphi(t) \approx 1$ для всех моментов времени, далёких от момента среднеплейстоценового перехода от коротких к долгим циклам, обозначаемого как t_0 . В этих случаях период решения систем (5) и (6) был близок к 45 тыс. лет. Когда же $\varphi(t) \approx 0$, то этот период увеличивался примерно до 95 тыс. лет, т.е. имел место среднеплейстоценовый переход.

Таким образом, описанная мультипликативная модель, будучи чисто формальной и никак не выведенной из законов гидротермодинамики атмосферы и океанов, оказалась способна воспроизвести основные особенности реальных палеоклиматических рядов. Однако это было достигнуто ценой введения большого числа подгоночных параметров. Их число превышает общее число ледниковых циклов плейстоцена, которые были объектами моделирования. Из опыта работ с описанной выше и другими подобными моделями стало ясно, что общая форма ледниковых циклов и их синхронность с вариациями инсоляции могут быть воспроизведены многими способами и с помощью самых разных уравнений. Правда, это мало способствует пониманию существа динамики ледниковых циклов плиоцена и плейстоцена и перехода между

ними. Поэтому, прежде чем выписывать какое-либо конкретное уравнение, следует тщательно проанализировать фактические данные, характеризующие ледниковые циклы и их эволюцию. Как это делать, указывает математическая теория нелинейных динамических систем, находящихся под воздействием внешних сил.

Исследования динамики ледниковых циклов методами теории динамических систем

Основные теоретические положения. Математическая теория, занимающаяся исследованием общих свойств решений систем дифференциальных и дифференциально-разностных уравнений, называется теорией динамических систем. Классическое изложение этой теории содержится в монографии [1]. В начале второй половины XX в. произошёл взрыв в развитии этой теории, связанный с обнаружением так называемого «странного хаотического аттрактора» (СХА). СХА описывает поведение нелинейной динамической системы, находящейся под воздействием внешних сил, которое отлично от стационарного, периодического и квазипериодического поведения и потому выглядит очень сложным и, как кажется, случайным. Стационарное, периодическое и квазипериодическое поведения с тех пор называются «простыми» аттракторами динамических систем. Они были известны ещё классикам теории и описаны в цитированной здесь монографии [1].

СХА — очень сложный аттрактор. Отсюда термин «странный» (strange) в его названии. Он состоит из множества решений динамической системы, включающих в себя бесконечное, но «счётное», т.е. могущее быть пересчитанным натуральным рядом чисел 1, 2, 3, ..., множество периодических решений, а также бесконечное, но неисчислимое (математики говорят «континуальное») множество непериодических решений. Все эти решения имеют свойство неустойчивости к малым возмущениям. Это значит, что при рассмотрении двух решений, которые в некоторый момент времени почти неотличимы друг от друга, можно обнаружить, что в последующем они ведут себя так, что различие между ними растёт с экспоненциальной скоростью. Поскольку все практические наблюдения не вполне точны, эта неустойчивость делает любое периодическое решение, из числа входящих в СХА, ненаблюдае-

мым. Кроме того, неустойчивость к малым возмущениям влечёт потерю предсказуемости поведения системы со СХА, как это бывает, например, при численном прогнозе погоды. Поэтому неудивительно, что СХА впервые был обнаружен выдающимся американским теоретиком метеорологии Э.Н. Лоренцем [46], изучавшим причины быстрого ухудшения качества прогнозов погоды при увеличении их заблаговременности.

Важно отметить, что энергетический спектр СХА — сплошной и не имеет пиков спектральной плотности. Сплошной характер энергетического спектра служит практическим признаком хаотического поведения динамической системы, часто называемого детерминированным хаосом. Такой хаос возникает при отсутствии каких-либо случайных воздействий на рассматриваемую систему, т.е. только из вышеуказанной неустойчивости всех решений, составляющих СХА. Сводка строгих математических результатов об общих свойствах поведения нелинейных динамических систем со СХА содержится в обзоре [2] (см. также [3]).

Для исследования динамики ледниковых циклов, рассматриваемых далее, крайне важной оказалась та часть теории динамических систем, которая относится к поведению нелинейных систем, находящихся под воздействием двух или более периодических внешних сил с несоизмеримыми периодами. В таких системах на пути от простых аттракторов к СХА может возникать ещё один странный аттрактор, состоящий из решений, не относящихся к экспоненциально неустойчивым. Он называется «странным нехаотическим аттрактором» (СНА). Энергетический спектр СНА не имеет непрерывного основания, а состоит из пиков спектральной плотности. Этих пиков так много (счётное число), что при визуальном рассмотрении спектра кажется, что непрерывное основание всё же имеет место. Впервые СНА был упомянут в работе [33]. СНА надо иметь в виду при исследовании ледниковых циклов, поскольку вариации инсоляции в геологическом масштабе времени состоят из комбинационных гармоник с очень большим числом периодов, многие из которых, наверняка, не соизмеримы друг с другом.

Первые применения теории динамических систем при изучении ледниковых циклов. Первые попытки использовать теорию динамических систем при исследовании ледниковых циклов

были предприняты ещё в конце XX в. [42, 48, 58]. Для описания временной эволюции глобального объёма льда и температуры, а также концентрации парниковых газов в этих работах использовались системы из нескольких, чаще всего трёх дифференциальных уравнений. Рассматривать сейчас эти модели нецелесообразно. Они морально устарели, ибо конкретные формы уравнений в этих моделях выбирались без учёта конкретной физики климатических процессов. По существу, они были произвольными. Однако недавно П. Хайберс опубликовал статью [37], привлёкшую внимание многих палеоклиматологов. В ней он предложил мультипликативную модель с запаздыванием, как в описанной ранее модели Райеля, но одномерную. Эта модель рассматривает только эволюцию общего объёма льда в климатической системе, как в моделях (1) и (2). Вместо дифференциального уравнения для описания изменений объёма льда со временем в модели Хайберса используется конечно-разностное уравнение

$$V_t = V_{t-1} + V_{t-\tau}^P \frac{a - \theta_t}{T}. \quad (7)$$

В нём V_t , V_{t-1} — объёмы льда в двух следующих друг за другом дискретных моментах времени (единица времени — тысяча лет). При этом, если V_t или V_{t-1} в некоторый момент времени оказываются отрицательными, то они просто заменяются нулями. Величина τ представляет собой запаздывание во времени; a — постоянная во времени скорость накопления льда; T — некоторая временная константа, определяющая скорость релаксации климатической системы к состоянию равновесия с приложенной внешней силой. Показатель степени $P = 0$, если $a > \theta_t$, и $P = p$, где p подбирается из множества положительных целых чисел, если $a < \theta_t$. Величина θ_t представляет собой инсоляционное форсирование, которое было выбрано в виде простой синусоиды с периодом около 40 тыс. лет, соответствующим главному циклу наклонения. Никакие другие периодичности инсоляции не принимались во внимание.

После подбора значений параметров модели (7) методом проб следующие шаги Хайберса — длительное интегрирование этой модели и построение по его результатам так называемого отображения первого возвращения для после-

довательных максимумов объёма льда, которые имели место через каждые 40 тыс. лет:

$$z_n: z_{n+1} - z_f = v(z_n - z_f). \quad (8)$$

Это отображение получилось однозначным и относится к тому типу отображений, которое в теории динамических систем называют отображением отрезка на себя. У Хайберса оно имеет вид функции, выпуклой вверх. Величина $z_f = 1,34$ представляет собой стационарное решение (8). Это значит, что при $z_n = z_f$ величина z_{n+1} также равна z_f . Если изобразить отображение (8) графически, откладывая величину z_n по оси абсцисс, а величину z_{n+1} по оси ординат, то стационарное решение изображается точкой, лежащей на биссектрисе координатного угла полученного графика. Стационарное решение отображения (8) неустойчиво. При $z_n - z_f$ сколь угодно малым по модулю, модуль величины $z_{n+1} - z_f$ оказывается больше, чем модуль $z_n - z_f$, и на нескольких следующих шагах по времени продолжает увеличиваться пока величина z_{n+1} не достигнет своего максимума (около 1,5) или минимума (около 0,5). Эти моменты соответствуют максимально возможному оледенению или межледниковью.

По мысли Хайберса, в плиоцене величина $z_0 - z_f$ совсем немного отличалась от нуля, т.е. была очень близка к стационарному решению. Поэтому, стартуя от такого её значения, он построил решение отображения (8), которое посчитал описывающим эволюцию ледниковых циклов для последних 2 млн лет, т.е. в позднем плиоцене и плейстоцене. Это решение показано на рис. 1, с в статье Хайберса [37], имеющейся в свободном доступе в интернете. Сначала в этом решении имеются десять 40-тысячелетних циклов сравнительно небольшой амплитуды, когда величина z_{n+1} колебалась вокруг стационарного решения z_f , будучи попеременно больше и меньше него. Затем величина z_{n+1} существенно уменьшилась и только потом вернулась в окрестность стационарного решения. Так повторялось дважды во временном интервале $\sim 1,6 \div \sim 1,4$ млн лет до н.вр., и было первым проявлением удвоения периода ледникового цикла. После ещё шести 40-тысячелетних циклов, примерно за 1,15 млн лет до н.вр. впервые появился цикл длиной 120 тыс. лет, при котором величина z_{n+1} достигала своего минимально возможного значе-

ния, соответствующего межледниковью. Затем (через 40 тыс. лет) величина z_{n+1} оказывалась немногим меньше стационарного значения; ещё через 40 тыс. лет становилась немногим больше него, снова немного уменьшалась и, наконец, оказалась вблизи своей максимально возможной величины. Эти переходы составили ледниковый цикл с периодом в 120 тыс. лет. В последующем поочередно получались циклы удвоенного и утроенного периода. Автор пришёл к заключению, что динамика плейстоценовых ледниковых циклов — пример детерминированного хаоса.

Казалось бы, что Хайберсу действительно удалось смоделировать эволюцию ледниковых циклов, включая их среднеплейстоценовый переход. Однако в дискуссии по поводу статьи [37], которая также доступна в интернете, отмечено, что очень трудно подобрать начальное условие для интегрирования (8) таким образом, чтобы получить длинную начальную последовательность 40-тысячелетних циклов, подобную той, что получил сам Хайберс. Поэтому нельзя считать, что модель (8) пригодна для описания старта оледенений в плиоцене. Хайберс был вынужден согласиться с этой критикой. Кроме того, указывалось, что модель пренебрегает хорошо известным трендом общего похолодания глобального климата, который имел место в течение последних десятков миллионов лет и который, по-видимому, привёл к среднеплейстоценовому переходу в длительностях ледниковых циклов. Пренебрежение трендом — также одна из причин того, что в отображении (8) 40-тысячелетние циклы позднего плиоцена представляют собой переходы не от межледникового климата к слабым оледенениям, как было в реальности, а переходы от слабого оледенения к сильному.

Отметим, что построить одномерное отображение для динамики ледниковых циклов, учитывающее тренд внешних воздействий на климатическую систему, очень трудно, если не невозможно. Проще построить такое отображение чисто эмпирически. Для этого достаточно рассмотреть какой-либо реальный палеоклиматический ряд, покрывающий период плиоцена и плейстоцена. Чтобы сохранить преемственность с моделью Хайберса, в этом ряду надо выбрать точки, соответствующие всем локальным по времени максимумам оледенений, и построить на их временной последовательности отобра-

жение, подобное (8). Это было сделано нами на примере ряда LR04 содержания изотопа кислорода $\delta^{18}\text{O}$ в донных океанических отложениях, который сейчас считается наиболее надёжным. Поскольку палеоклиматические вариации в этом ряду многомасштабны и к тому же отягощены разнообразными измерительными ошибками, предварительно из ряда с помощью полинома низкого порядка мы исключили общий тренд похолодания климата и провели полосовую фильтрацию, исключившую из рассмотрения все палеоклиматические вариации с периодами короче 29 тыс. лет и длиннее 164 тыс. лет. Основанная на вейвлетах техника этой фильтрации будет описана далее. Затем тренд был снова добавлен, и только после этого было построено отображение типа (8). Оно показано на рис. 1.

Белыми ромбиками на рис. 1 даны точки полученного отображения, соответствующие временному интервалу от 4–3 млн лет до н.вр., когда имели место 40-тысячелетние циклы и климат был в целом тёплым. Чёрные кружочки соответствуют интервалу от 3–1,25 млн лет до н.вр., когда климат стал уже довольно холодным, но перехода к долгим циклам ещё не произошло. Чёрные крестики соответствуют интервалу последних 1,25 млн лет, когда климат был в целом наиболее холодным и наблюдались ледниковые циклы длительностью порядка 100 тыс. лет. На рис. 1 всего 100 значков. Наиболее очевидная особенность рис. 1 — общий сдвиг точек отображения от левого нижнего угла показанного графика к его верхнему правому углу вдоль биссектрисы координатного угла. Ясно, что этот сдвиг представляет собой следствие тренда общего похолодания климата. Уже по причине этого сдвига полученное отображение не однозначно, как отображение (8), т.е. каждому значению абсциссы на рис. 1 могут соответствовать несколько значений ординаты. Далее обращает на себя внимание, что все точки отображения, показанные ромбиками, без какого-либо порядка теснятся вблизи биссектрисы. Поскольку палеоклиматологи предполагают, что все плиоценовые климатические циклы были более или менее одинаковые, то должен был бы наблюдаться только один ромбик, лежащий на биссектрисе. Поэтому видимое на рис. 1 облако ромбиков можно использовать для оценки уровня наблюдаемых шумов в рассматриваемом ряду LR04.

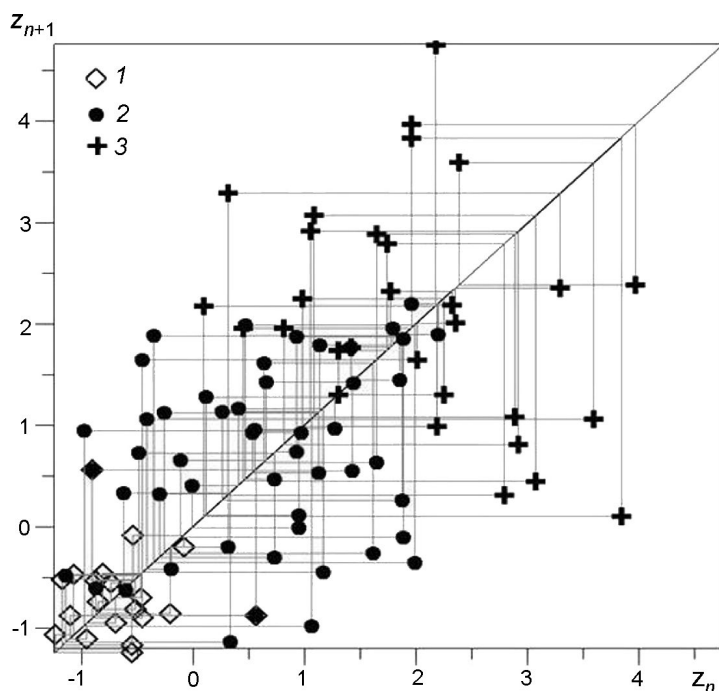


Рис. 1. Отображение первого возвращения для локальных максимумов оледенения, как они представлены в фильтрованном ряду LR04 с учётом общего тренда похолодания климата в плиоцене–плейстоцене.

Точки отображения, относящиеся к временному интервалу: 1 – 4–3 млн лет до н.вр.; 2 – 3–1,25 млн лет до н.вр.; 3 – последних 1,25 млн лет

Fig. 1. The first return map for local glaciation maxima, as they are represented in the filtered LR04 record with taking into consideration a general climate cooling trend during the Pliocene–Pleistocene.

Points of the map related to the time interval of: 1 – 4–3 million years B.P.; 2 – 3–1,25 million years B.P.; 3 – the last 1,25 million years

Облако зачернённых кружочков на рис. 1 имеет более чем втрое больший размер, чем облако ромбиков, а облако крестиков – почти впять раз больше. Даже если отнестись к части размеров этих облаков на счёт шумов, например шумов временного интервала 4–3 млн лет до н.вр., то отклонения отдельных кружочков и крестиков вверх и вниз от биссектрисы останутся существенными. Эти отклонения и составляют искомое эмпирическое отображение. Его принципиальное отличие от отображения Хайберса – неоднозначность, т.е. одной точке отображения, соответствующей какому-то значению абсциссы, могут соответствовать несколько точек с разными значениями ординаты, лежащих как выше, так и ниже биссектрисы координатного угла. Такое поведение известно в математике для так называемых отображений окружности на себя. Отображения окружности получаются, в частности, если рассматриваются динамические системы, на которые воздействуют периодически или квазипериодически меняющиеся внешние силы. Напомним, что отображение Хайберса построено в расчёте на существование только одной внешней периодичности в 40 тыс. лет. Перейдя к отображению на 40-тысячелетнем периоде, он исключил эту периодичность из явного рассмотрения и получил отображение отрезка на себя. Таким об-

разом, по построению модель Хайберса имеет принципиальное отличие от реальности.

Вейвлетное преобразование нестационарных временных рядов. В своих собственных исследованиях особенностей и временной эволюции ледниковых циклов методами теории динамических систем [4–6, 9, 39, 40] мы принимали во внимание интегральную нестационарность динамики ледниковых циклов (пункт 5 в конце Введения), чего не делали предыдущие исследователи. Традиционные средства корреляционно-спектрального анализа временных рядов мало пригодны для исследования такой динамики. Адекватным математическим средством служит комплексное вейвлетное преобразование (КВП):

$$WT(b, a) = WT_{re}(b, a) + iWT_{im}(b, a) = \int_{\theta} a^{-1/2} T(t) MOR^*((t-b)/a) dt, \quad a > 0, \quad (9)$$

где $T(t)$, $t \in \theta$ – вещественный временной ряд, а в качестве преобразующей («материнской» вейвлетной) функции используется функция

$$MOR(\tau) = \pi^{-1/4} \exp\{iC\tau\} \exp\{-\tau^2/2\}, \quad (10)$$

предложенная французским математиком Ж. Морле. Свёртка этой функции вычисляется для всевозможных временных сдвигов $(t-b)$ и вейвлетных масштабов (a) . Значок * в (9) означает комплексное сопряжение. Выбор частотной характе-

ристики функции Морле $C = 6,2035$ обеспечивает строгое равенство вейвлетного масштаба обычному Фурье-масштабу, т.е. амплитуда КВП гармонического временного ряда $T(t) = A \cos(2\pi\omega t + \varphi)$ получается максимальной в вейвлетном масштабе $a = 2\pi/\omega$, а передаточная функция КВП как полосового фильтра, получаемая путём преобразования Фурье самой функции Морле, имеет вид гауссиана для положительных a :

$$MOR(a) \cong \exp\left\{-(a-C)^2/2\right\}, \quad a^{-1} > 0; \quad (11)$$

значения передаточной функции, соответствующие отрицательным a , которые формально появляются в преобразовании Фурье, обнуляются. Амплитуда КВП в масштабе a оказывается равна взвешенному среднему амплитуд Фурье-гармоник преобразуемого ряда в некотором диапазоне вокруг этого масштаба (о деталях этого см. гл. 8 книги [16]).

Заметим, что любой доступный для анализа палеоклиматический ряд не только конечен, но и задан своими значениями на сетке неравно отстоящих точек. Поэтому обычно производят интерполяцию этих значений на точки, равномерно отстоящие друг от друга, а уже затем делают вейвлетное преобразование по формуле (9), в которой интегрирование заменяется суммированием, т.е.:

$$\begin{aligned} WT(b, a) &= WT_{re}(b, a) + iWT_{im}(b, a) = \\ &= a^{-1/2} \sum_{n=1}^N T(t_n) MOR^*(\delta t(n-b)/a), \end{aligned} \quad (12)$$

где δt — шаг по времени между последовательными точками ряда.

В палеоклиматических рядах расстояние между соседними точками обычно экспоненциально возрастает со временем, поэтому такая интерполяция может исказить спектральный состав анализируемых колебаний. Чтобы её избежать, была разработана техника прямого оценивания палеоклиматических энергетических спектров по рядам неэквидистантных точек (см., например, [18, 59, 60]). КВП временного ряда неэквидистантных точек получается следующим суммированием:

$$\begin{aligned} WT(b, a) &= WT_{re}(b, a) + iWT_{im}(b, a) = \\ &= a^{-1/2} \sum_{n=1}^N T(t_n) MOR^*((t_n-b)/a) / \sum_{n=1}^N \left[MOR^*((t_n-b)/a) \right]^2. \end{aligned} \quad (13)$$

Проверка на тестах показала, что в случае равномерно отстоящих точек это даёт тот же ре-

зультат, что и стандартная программа КВП, использующая (12). Для ряда неэквидистантных точек использование (13) менее чувствительно к спектральному перетеканию энергии в сторону низких частот.

Для исследования ледниковых циклов оказалось существенным использование обратного вейвлетного преобразования (ОВП). Обычно для него используют только вещественную компоненту КВП — $T_{re}(t, a)$. Это позволяет реконструировать колебания рассматриваемого временного ряда, ограниченные определённым диапазоном временных масштабов. Сама формула ОВП может записываться по-разному. В самом простом случае она имеет вид так называемой формы Морле:

$$T^{recon}(t) = \int_{a_{min}}^{a_{max}} WT_{re}(t, a) da. \quad (14)$$

В (14) пределы интегрирования a_{min} и a_{max} определяют диапазон масштабов, внутри которого реконструируются колебания. Для нас оказалось важным реконструировать не только сами эти колебания, но и их мнимый аналог, определяемый преобразованием Гильберта — $H[T^{recon}(t)] = \pi^{-1} P \int_{-\infty}^{\infty} T_{im}^{recon}(s)/(t-s) ds$ (P — главное значение рассматриваемого несобственного интеграла). Для этого производится вычисление по формуле, аналогичной (12), но с заменой в ней $WT_{re}(t, a)$ на $T_{im}(t, a)$. В сумме получается комплексная реконструкция фильтрованных колебаний рассматриваемого ряда, позволяющая увидеть «фазовый портрет» этих колебаний, как они выглядят в некотором двумерном фазовом подпространстве состояний климатической системы. Конечно, палеоклиматические колебания многомасштабны и, следовательно, требуется очень многомерное фазовое пространство, чтобы изобразить их со всеми деталями. Однако важно наглядно представить только те особенности палеоклиматических колебаний, которые относятся к основным масштабам ледниковых циклов (10–100 тыс. лет), и было заранее предположено, что двумерное фазовое подпространство будет достаточным для этого.

Динамика ледниковых циклов, наблюдаемая с помощью вейвлетов. Пионеры исследования ледниковых циклов считали, что эти циклы представляют собой почти линейный отклик климатической

системы на широтное перераспределение инсоляции, индуцированное колебаниями прецессии и наклона оси вращения Земли к плоскости эклиптики. Накопленные к настоящему времени палеоклиматические данные отчасти подтверждают их мнение, по крайней мере для временного интервала плиоцена. Конечно, большой вклад в динамику климатов плиоцена и плейстоцена вносит кажущееся непрерывным основание климатических энергетических спектров. Если оно реально, а не обусловлено измерительными ошибками палеоклиматических рядов, то эту динамику, в принципе, надо считать хаотической, а за её математический образ принять СХА. Однако при исследовании ледниковых циклов всегда пренебрегали высокочастотными (с периодами менее 10 тыс. лет) климатическими вариациями и учитывали только дискретные пики спектральной плотности на частотах прецессии, наклона и эксцентриситета орбитального движения Земли. Это позволяет рассматривать много более простой аттрактор, являющийся «скелетом» много более сложного аттрактора колебаний, охватывающих все масштабы движения. Такой аттрактор может быть чисто периодическим (тогда он называется предельным циклом) или квазипериодическим (называется тор-аттрактором) решением.

В качестве источников данных о динамике климатов плейстоцена и плиоцена в описываемых далее исследованиях были использованы ряды «Композит» [61, 62] и «LR04» [44] вариаций содержания изотопа кислорода $\delta^{18}\text{O}$ в океанических донных отложениях. Эти ряды охватывают весь интервал времени плейстоцена и плиоцена (5–6 млн лет до н.вр.). Также были рассмотрены более короткие (около 400 и 800 тыс. лет до н.вр.) ряды содержания дейтерия и солей натрия в ледниковых кернах антарктических станций Восток и Купол С [31, 41, 52, 64]. Анализы всех этих рядов привели практически к одним и тем же результатам. В рядах содержания изотопа кислорода $\delta^{18}\text{O}$ в донных океанических отложениях, известных под названиями «Композит» и «LR04», обнаружено (см. рисунки в статьях [6, 9, 39, 40]), что в интервале от 6 до примерно 1,5 млн лет до н.вр. амплитуды КВП были велики только вблизи вейвлетного масштаба в 41 тыс. лет. Это позволило предположить, что скелет аттрактора палеоклиматических колебаний был очень простым (периодическое решение). Размах этих колебаний был тем боль-

ше, чем ближе был рассматриваемый момент к настоящему времени. Эта зависимость особенно заметна с 3 млн лет, что совпадает со временем образования Панамского перешейка, повлёкшего кардинальную реорганизацию общей циркуляции океана и, как предполагается, существенно повлиявшего на динамику климата [47].

Для исследования последующей эволюции скелета аттрактора климатических колебаний с помощью комплексного обратного ОВП были реконструированы палеоклиматические колебания в диапазоне масштабов от 29 до 164 тыс. лет. При сравнении реконструированных колебаний с одновременными колебаниями наклона обнаружена высокая степень их синхронности, особенно синхронность биений в сравниваемых рядах (увеличений и уменьшений амплитуд их колебаний) с периодом около 1,2 млн лет. Период биения $\sim 1,2$ млн лет соответствует наиболее мощному из указанных в [24] сверхдолгопериодных циклов наклона.

Реконструкция показала, что общий размах палеоклиматических колебаний рос со временем вместе с общим похолоданием климата в плиоцене. Это привело к тому, что колебания потеряли устойчивость. В результате качественно изменился скелет палеоклиматического аттрактора, т.е. произошло то, что в математике называется «бифуркацией». Это можно видеть на рис. 2, на котором показаны ряд «Композит» и картина амплитуд его КВП для последних 1,5 млн лет. Видно, что в момент $\sim 1,25$ млн лет до н.вр. появилась полоса больших амплитуд КВП, идущая от вейвлетного масштаба в 41 тыс. лет в направлении масштаба 82 тыс. лет. Примерно за 1 млн лет до н. вр. эта полоса трансформировалась в полосу, синусоидально варьирующую между вейвлетными масштабами 82 и 123 тыс. лет. Более детально эта синусоидально варьирующая полоса увеличенных амплитуд КВП показана на рис. 3 для ряда содержания солей натрия морского происхождения (*ssNaflux*) в ледниковом керне антарктической станции Купол С.

Заметим, что эта синусоидально варьирующая полоса уже отмечалась в ранее обсуждавшихся работах Райеля как свидетельство частотной модуляции палеоклиматических колебаний в диапазоне масштабов эксцентриситета. На обоих рисунках по максимумам содержания $\delta^{18}\text{O}$ и *ssNaflux* в исходных рядах (они соответствуют

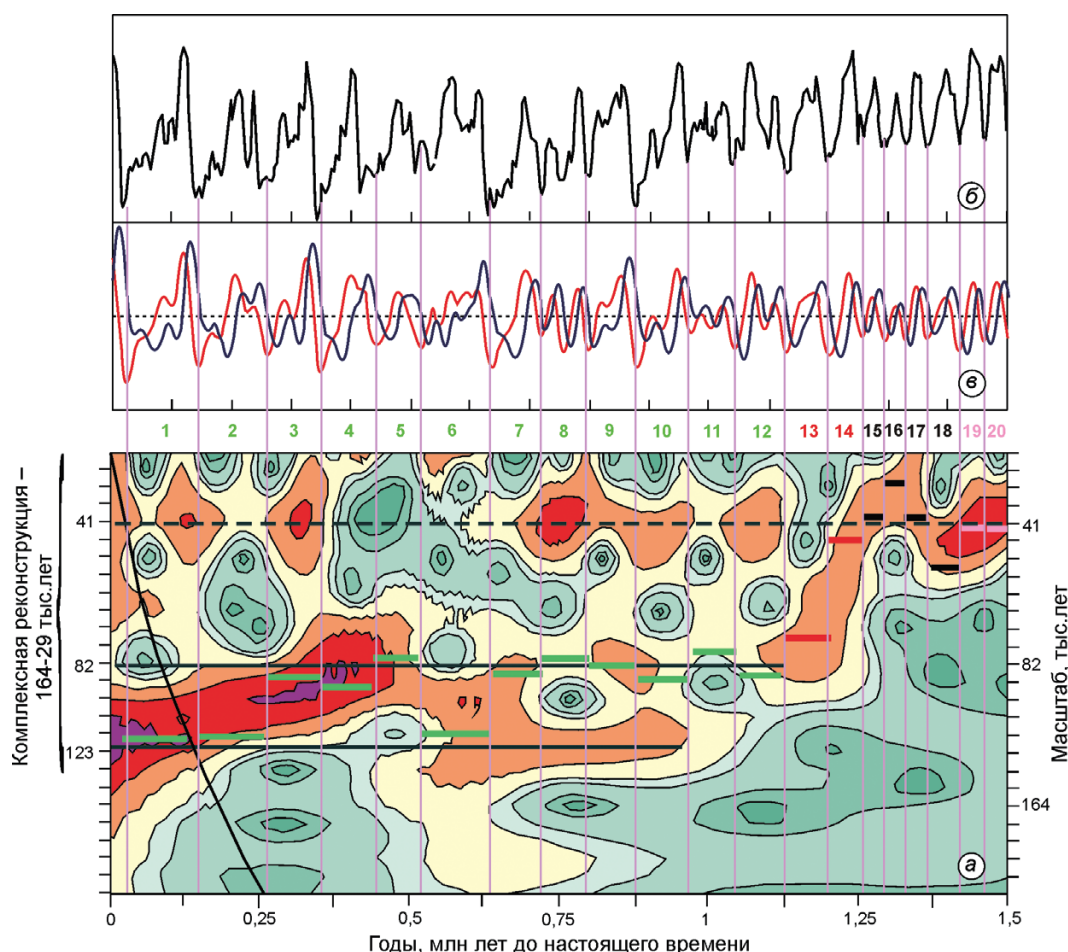


Рис. 2. Картина амплитуд вейвлетного преобразования ряда «Композит» содержания изотопа кислорода $\delta^{18}\text{O}$ *Bentic foraminiferas* [55, 56] (a); преобразуемый ряд (ось ординат перевёрнута, чтобы минимумы соответствовали наиболее холодному климату) (б); комплексная реконструкция колебаний в ряду в диапазоне масштабов от 29 до 164 тыс. лет (в).

Тонкие вертикальные линии, проведённые по максимумам оледенений, разделяют картину амплитуд КВП на 20 кусков, соответствующих 20 ледниковым циклам, имевшим место за рассматриваемый интервал времени. Эти циклы пронумерованы числами от 1 (самый недавний цикл) до 20. Толстые горизонтальные полосы в каждом куске проведены по вейвлетным масштабам, где амплитуды КВП были наибольшими в каждом ледниковом цикле

Fig. 2. Wavelet transform amplitude pattern of the «Composite» oxygen isotope of *Bentic foraminiferas* record [55, 56] (a); the original record being transformed (the y-axis inverted, to show the coldest climates by minima of the graph) (b); complex reconstruction of the record over the range of wavelet scales from 29 to 164 thousand years (c).

Thin vertical line which are drawn through the glacial maxima, share the picture of the WT-amplitudes onto 20 pieces corresponding to 20 glacial cycles that have taken place over a given time interval. These cycles are numbered from 1 (the most recent cycle) to 20. Thick horizontal stripes in each piece performed on the wavelet scale, where the WT-amplitude was greatest during each glacial cycle

максимумам оледенений) выделены и пронумерованы цифрами от 1 (самый недавний цикл) до 20 (6 на рис. 3) все наблюдавшиеся за рассматриваемые периоды времени ледниковые циклы. Для всех циклов горизонтальной линией помечено положение каждого из выделенных циклов на том вейвлетном масштабе, где амплитуда КВП этого цикла была максимальна. Эти полосы показаны чёрным цветом для циклов до выше упомя-

нутой бифуркации, красным — в момент бифуркации и зелёным — после бифуркации.

На рис. 4, заимствованном из нашей статьи [6], показаны двумерные проекции скелета палеоклиматического аттрактора, как он виден в ряду «Композит», для 20 ледниковых циклов, имевших место в течение последних 1,5 млн лет до н.вр. Цифрами на рис. 4 (курсив) указаны длительности этих циклов в тысячах лет. Видно, что

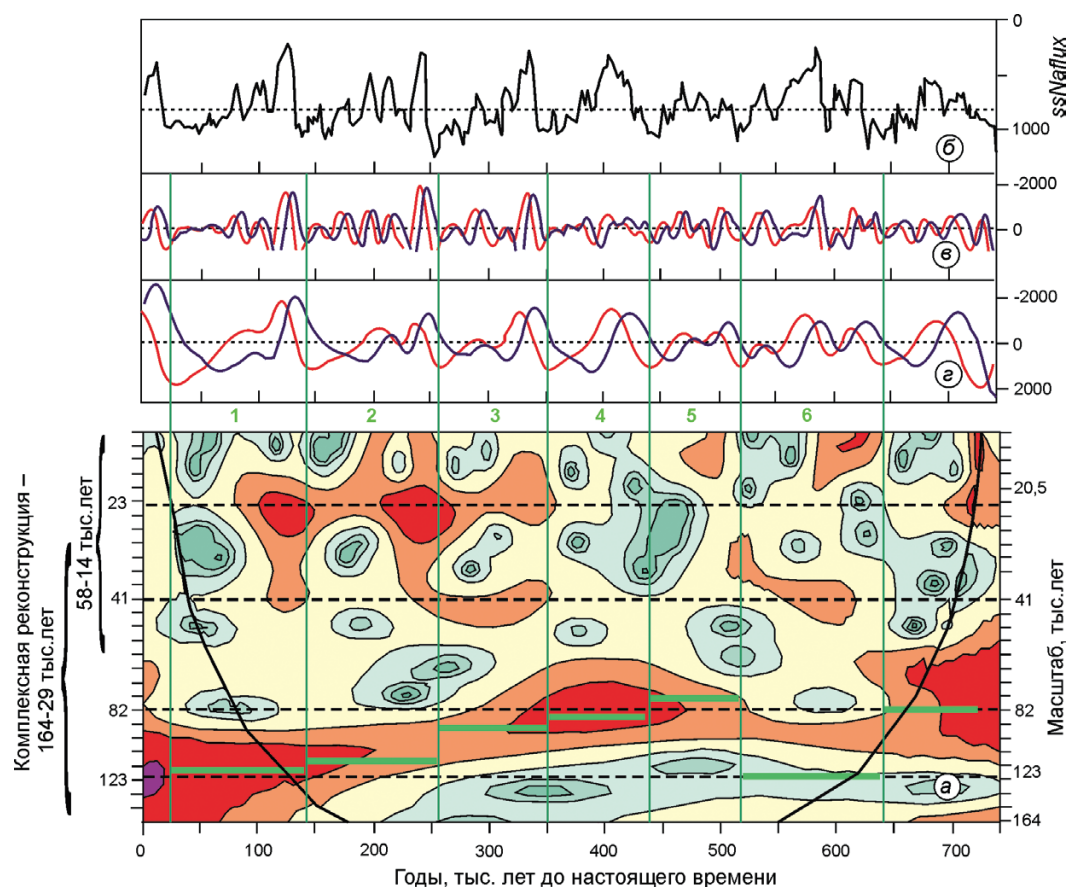


Рис. 3. Картина амплитуд вейвлетного преобразования ряда содержания солей натрия морского происхождения в ледниковом керне антарктической станции Купол С для последних примерно 750 тыс. лет (данные Физического института университета г. Берн, Швейцария — получены от Ф. Ламберта) (а); преобразуемый ряд (ось ординат перевёрнута, чтобы минимумы соответствовали наиболее холодному климату) (б); комплексные реконструкции ряда в диапазонах масштабов от 29 до 164 (в) и от 14 до 58 тыс. лет (г) соответственно. Рисунок взят из работы [39]

Fig. 3. Wavelet transform amplitude pattern of the record of the sea-salt Na content in the ice core from the Antarctic station «Dome C» during the last approximately 750 thousand years (data received from Physical Institute of Bern, Switzerland by courtesy of F. Lambert) (a); the original record being transformed (the y-axis inverted, to show the coldest climates by minima of the graph) (b); two complex reconstructions of the record over the range of the wavelet scales from 29 to 164 (v), and from 14 to 58 thousand of years (z) respectively. This Figure was adopted from [39]

длительности циклов 20–15 близки к длительности главного цикла наклонения (~41 тыс. лет). Форма каждого из этих циклов близка к окружности. Движение по этой окружности происходит против часовой стрелки. Имеющиеся отклонения в длительностях и форме можно отнести на счёт неточностей, безусловно, имеющих у ряда «Композит». Циклы 20–14 типичны для всех климатических циклов, имевших место ранее 1,5 млн лет до н.вр. и типичных для плейстоцена.

Цикл 13 также мало отличается от окружности по форме двумерной проекции соответствующего ему отрезка фазовой траектории. Однако

его длительность составляет 73 тыс. лет. Длительности последующих циклов 12–7 варьируют от 76 до 85 тыс. лет. Все эти длительности, вероятно, неотличимы от удвоенной длительности главного цикла наклонения. Что касается форм циклов 12–5, то они имеют, как отличительную особенность, петельки на окружности, которые вместе с удвоенными периодами этих циклов по сравнению с циклами плейстоцена позволяют предполагать, что во время цикла 13 произошла бифуркация удвоения периода палеоклиматического аттрактора — предельного цикла. Это и есть знаменитый среднеплейстоценовый переход (the Mid-

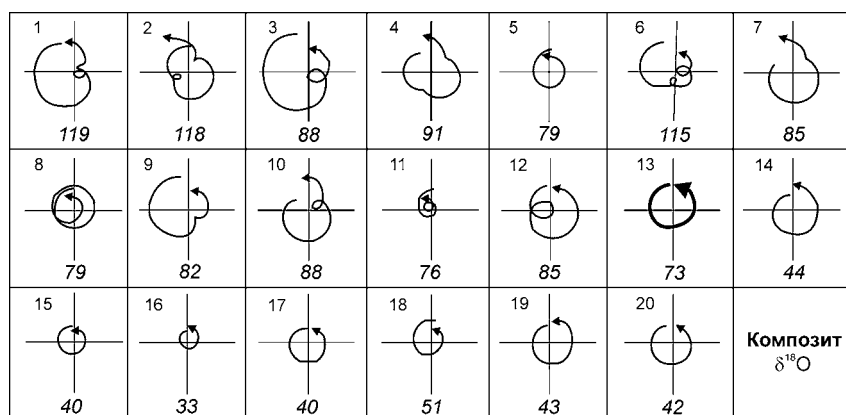


Рис. 4. Формы всех 20 плейстоценовых ледниковых циклов, как они видны в двумерном подпространстве, осями которого служат вещественная и мнимая части комплексной реконструкции части ряда «Композит» в диапазоне вейвлетных масштабов от 164 до 29 тыс. лет.

Длины циклов указаны в тысячах лет (курсив). Рисунок взят из статьи [6]

Fig. 4. Shapes of all 20 glacial cycles of the Pleistocene as these are seen on a two-dimensional state-subspace of a complex reconstruction band-passed over the 29–164 thousand years range of wavelet scales for the «Composite» record.

The lengths of all cycles (in thousand years) are indicated (italic type). This figure was adapted from [6]

Pleistocene transition) в истории климатических циклов плиоцена–плейстоцена. Бифуркация удвоения периода хорошо изучена математиками как один из главных путей к детерминированному хаосу в нелинейных динамических системах.

Однако одной этой бифуркацией дело не ограничилось. У циклов 6, 2 и 1 видны две петельки, а периоды этих циклов составляют 115, 118 и 119 тыс. лет, что близко к утроенному главному циклу наклонения. В то же время, у циклов 5 и 4 видно только по одной петельке, а длительности этих циклов близки к удвоенному периоду наклонения. Таким образом, скелет палеоклиматического аттрактора непрерывно эволюционировал в плейстоцене. Согласно теории динамических систем, возбуждаемых двумя или более внешними силами с несоизмеримыми периодами, такое поведение типично для СНА. Решения, принадлежащие СНА, непрерывно «блуждают» между резонансами, временно возникающими между различными, вообще говоря, несоизмеримыми внешними воздействиями на систему. В частности, вышеуказанные периоды ледниковых циклов можно отнести к «захвату в резонанс» с периодом эксцентриситета, равным 119 тыс. лет. Сам же 119-тысячелетний период получается от частотной модуляции периода эксцентриситета в 92 тыс. лет самым главным периодом эксцентриситета в 413 тыс. лет (по разности их частот: $1/92 - 1/413$). Это полностью соответствует рабо-

там Райеля. Период цикла 5, равный 79 тыс. лет, также можно объяснить частотной модуляцией. Несущим при этом следует рассматривать период в 95 тыс. лет, а модулирующим – в 413 тыс. лет (по сумме их частот: $1/92 + 1/413 = 1/76$). Объяснение периодов циклов 4 и 3 в 88 и 91 тыс. лет тоже возможно, но оно требует рассмотрения модуляций основных циклов наклонения и эксцентриситета с их циклами, имеющими периоды в 1–2 млн. лет, что относится к вторичной частотной модуляции, также рассматривавшейся Райелем.

Отметим, что в картинах амплитуд КВП рядов «Композит» и *ssNaflux* на рис. 2 и 3 видно, что полоса увеличенных амплитуд вблизи вейвлетного масштаба в 41 тыс. лет в общем сохранилась и в циклах 1–12. Это показывает, что прежний 41-тысячелетний предельный цикл по-прежнему имел место в фазовом пространстве климатической системы. Просто он стал не наблюдаемым непосредственно. Это соответствует тому, что говорит теория динамических систем о бифуркации удвоения периода. Отметим, что самые последние зарубежные публикации продолжают указывать время среднеплейстоценового перехода гораздо позже (примерно за 900 тыс. лет до н.вр.) и связывают его с резкими региональными изменениями в климатической системе. Например, в [30] утверждается, что данный переход был инициирован резким ростом объема Антарктического ледникового

щита. В [51] предполагается, что причиной было резкое ослабление термохалинной циркуляции в Северной Атлантике. Описанные здесь результаты качественного исследования ледниковых циклов дают основание думать, что эти региональные изменения были следствиями (а не причинами) среднеплейстоценового перехода.

Как уже отмечалось, траектории СНА нечувствительны к малым возмущениям начальных условий и это открывает принципиальную возможность для предсказания характера ледниковых циклов в ближайшем будущем. Конечно, при дальнейшей эволюции СНА может перейти в СХА и тогда предсказания будут невозможны. Поэтому важно выяснить, к какому типу аттракторов (СНА или СХА) относится скелет климатических колебаний в настоящее время. Для ответа на этот вопрос мы изучили особенности ледниковых циклов позднего плейстоцена. В частности, рассмотрено [8], за счёт чего примерно за 400 тыс. лет до н.вр. резко увеличилась климатическая изменчивость. Картины амплитуд КВП ранее упомянутых палеоклиматических рядов показали, что в это время существенно увеличились амплитуды КВП в диапазоне масштабов прецессии (порядка 19–23 тыс. лет). Если принимать эти увеличения во внимание, то скелет климатического аттрактора уже нельзя считать предельным циклом. Он должен быть, как минимум, двумерным или даже трёхмерным тором. Исследование такого аттрактора описанным ранее методом, основанным на использовании обратного КВП, уже невозможно.

Однако теория динамических систем и для этого более сложного аттрактора даёт некоторые конструктивные средства анализа. К их числу относится специальный анализ свойства самоподобия энергетического спектра СНА [29, 53]. Теория указывает, что в энергетическом спектре квазипериодически форсированной динамической системы спектральная плотность возрастает локально вблизи комбинационных частот всех внешних сил и собственной частоты системы. Например, при наличии одного собственного колебания системы и двух внешних сил увеличения должны появляться вблизи частот, удовлетворяющих соотношению $k\omega_{ei} + l\omega_{f1} + m\omega_{f2} = 0$, где k, l, m — положительные и отрицательные целые числа. Имея в виду попарную несоизмеримость всех частот, эти увеличения должны состоять из бесконечного

числа дельта-пиков, соответствующих всевозможным резонансам: $k\omega_{ei} + l\omega_{f1} + m\omega_{f2} = 0$, где $\omega_{ei}, \omega_{f1}, \omega_{f2}$ — n -е рациональные аппроксимации частот ($n = 1, 2, \dots$). Это значит, что энергетический спектр квазипериодически форсированной нелинейной системы в режиме СНА дискретен и самоподобен. Он имеет специальное название — «сингулярный непрерывный спектр». У этого спектра мощность спектрального пика $S_{\max}(N)$ зависит от порядкового номера пика N . Данная зависимость имеет вид полинома первой степени в двойном логарифмическом масштабе — $\lg S_{\max}(N) \approx \lg N$, если уже имеет место хаос. Если же хаоса ещё нет, то зависимость имеет вид полинома более высокой степени — $\lg S_{\max}(N) \approx \sum_{i=1}^k \lg N^i$, где $k = 2$ или более.

На рис. 5 эта зависимость показана для энергетического спектра ряда содержания дейтерия в ледниковом керне антарктической станции Восток. При расчёте этой зависимости в нашей работе [10] учтены амплитуды шести главных пиков спектра, соответствующих диапазонам временных масштабов эксцентриситета, наклонения и прецессии. Зависимость, очевидно, нелинейная. Она хорошо аппроксимируется квадратичной параболой (серая линия). Отсюда следует принципиальная возможность предсказания поведения глобальной климатической системы в ближайшем будущем, имея в виду геологический масштаб времени, т.е. для следующих десятков и сотен тысяч лет. Однако такая предсказуемость может иметь не только теоретический интерес. Например, в нашей работе [7] на основе сравнительного (основанного на веяв-летах) анализа многовековых и тысячелетних колебаний в межледниковье MIS-11, имевшем место около 400 тыс. лет до н.вр., и в современном межледниковье — голоцене — был сделан вывод, что современное межледниковье скоро (порядка 1 тыс. лет после н.вр.) закончится.

Заключение

В течение последних десятилетий показано, что вариации инсоляции, вызванные 41-тысячелетним циклом наклона оси вращения Земли к плоскости эклиптики, были главными движителями изменений климата и в плиоцене, и в плейстоцене. Начиная с Кальдера многие иссле-

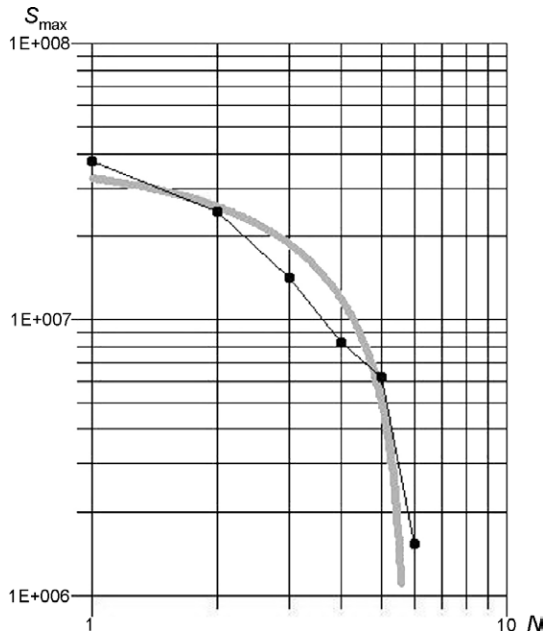


Рис. 5. Зависимость между амплитудами $S_{\max}(N)$ наиболее мощных пиков 1–6 в энергетическом спектре плейстоценовых климатических колебаний, как они видны в ряду дейтерия антарктической станции Восток (ось ординат) и порядковыми номерами N этих пиков (ось абсцисс).

Серая линия — аппроксимация этой зависимости квадратичным полиномом. Рисунок взят из статьи [10]

Fig. 5. The interrelationship between amplitudes $S_{\max}(N)$ of the 1–6 most powerful peaks in the power spectrum of the Pleistocene climatic variations as they are seen in the record of the deuterium content in the ice core of the Antarctic station Vostok (y-axis) and the sequence numbers N of these peaks (x-axis). This interrelation is presented in double logarithmic scale.

The gray line is the approximation of this interrelation by a quadratic polynomial. This figure was adapted from the paper-[10]

дователи предложили ряд простых математических моделей для объяснения того, как периодические вариации инсоляции могли приводить к ледниковым циклам. С помощью этих моделей удалось воспроизвести даже некоторые структурные особенности этих циклов, например их пилообразную форму. Однако с помощью подобных моделей невозможно было установить причину среднеплейстоценового перехода в длительности ледниковых циклов.

Используя идеи и методы современной теории нелинейных динамических систем, а также технику анализа палеоклиматических временных рядов с помощью вейвлетов, в наших собственных исследованиях были изучены тонкая структура и

особенности временной эволюции определённым образом осреднённых палеоклиматических колебаний. Эти осреднённые колебания можно рассматривать как «скелет» аттрактора климатической системы в её «фазовом пространстве».

Выяснено, что среднеплейстоценовый переход в длительностях ледниковых циклов произошёл примерно за 1,25 млн лет до н.вр., а не позже, как полагали многие зарубежные исследователи. Причина этого перехода — потеря устойчивости тем климатическим аттрактором, который имел место ранее, в период плиоцена. Этим плиоценовым аттрактором был «предельный цикл», т.е. чисто периодический отклик климатической системы на изменения инсоляции, обусловленные наиболее мощным 41-тысячелетним циклом наклона оси вращения Земли к плоскости эклиптики. Этому отклику отвечает мощный пик в энергетическом спектре соответствующих палеоклиматических рядов при отсутствии соизмеримых пиков на других периодах.

Первым фактором дестабилизации стало биение инсоляционных изменений, обусловленное наложением на 41-тысячелетний цикл наклонения другого цикла, период которого был много больше (около 1,2 млн лет). Второй фактор — общий тренд похолодания климата. Из-за тренда похолодания, физическую причину и механизм которого ещё предстоит выяснить, и периодически повторявшихся уменьшений инсоляции в процессе биения к концу плиоцена стали разрастаться покровные оледенения в Северном полушарии в дополнение к ранее уже существовавшему оледенению Антарктики. Это увеличило изменчивость альбедо Земли и тем самым расширило набор возможных колебаний в самой климатической системе, в итоге поспособствовав дестабилизации плиоценового 41-тысячелетнего предельного цикла.

После потери устойчивости плиоценовый аттрактор стал ненаблюдаемым. Взамен появился новый аттрактор, который также был предельным циклом, но вдвое большего периода. Так что среднеплейстоценовый переход соответствовал тому, что в теории динамических систем называется «бифуркацией удвоения периода». Потом этот новый аттрактор эволюционировал, откликаясь на долгопериодные вариации инсоляции, которые, в свою очередь, были обусловлены комбинационными гармониками наклона и эксцентрисите-

та, их амплитудной и частотной модуляцией. Это отразилось в многопиковой форме энергетических спектров плейстоценового климата, интенсивно изучавшейся в работах Райеля с сотрудниками.

В наших исследованиях были построены «фазовые портреты» плейстоценового аттрактора на разных стадиях его эволюции. Оказалось, что этот аттрактор утраивал, удваивал и снова утраивал свой период соответственно резонансам с текущими гармониками инсоляции. Такое «блуждание между резонансами» — ожидаемое в теории нелинейных динамических систем, которые находятся под воздействием двух и более внешних сил с несоизмеримыми периодами и аттрактор которых очень сложен по форме («странный» в терминах математики), но не хаотичен.

Нехаотичность плейстоценового аттрактора подтвердилась при специальном анализе энергетических спектров плейстоценовых климатических рядов. Поэтому появилась принципиальная возможность предсказать дальнейшую эволюцию плейстоценового аттрактора. Для этого были сопоставлены многовековые и тысячелетние палеоклиматические колебания во время межледниковья, известного как Морская изотопная стадия 11, и во время современного межледниковья — голоцена. Это сравнение показало возможность скорого (в пределах 1 тыс. лет) окончания голоцена с последующим переходом к новому ледниковому периоду.

Исследования выполнены при финансовой поддержке РФФИ (гранты 09-05-64209, 05-05-64299, 09-05-00155, 11-05-00106 и 11-05-00136).

Литература

1. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959. 918 с.
2. Арнольд В.И., Афраймович В.С., Ильяшенко Ю.С., Шильников Л.П. Теория бифуркаций. Динамические системы. 5. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: изд. ВИНТИ, 1986. 218 с.
3. Афраймович В.С., Шильников Л.П. Инвариантные двумерные торы, их разрушение и стохастичность // Методы качественной теории дифференциальных уравнений. Горький: изд. ГГУ, 1983. С. 3–25.
4. Вакуленко Н.В., Котляков В.М., Монин А.С., Сонечкин Д.М. Симметрия ледниковых циклов позднего плейстоцена по данным станций «Восток» и «Купол С» в Антарктиде // ДАН. 2006. Т. 407. № 1. С. 111–114.
5. Вакуленко Н.В., Котляков В.М., Монин А.С., Сонечкин Д.М. Синхронность ледниковых циклов позднего плейстоцена с ходом инсоляции на экваторе и ее перераспределением между высокими и низкими широтами // Изв. РАН. Серия геогр. 2007. № 5. С. 45–57.
6. Вакуленко Н.В., Иващенко Н.Н., Котляков В.М., Сонечкин Д.М. О бифуркации умножения периода ледниковых циклов в начале плейстоцена // ДАН. 2011. Т. 436. № 4. С. 541–544.
7. Вакуленко Н.В., Сонечкин Д.М. Свидетельство скорого окончания современного межледниковья // ДАН. 2013. Т. 452. № 1. С. 92–95.
8. Вакуленко Н.В., Котляков В.М., Сонечкин Д.М. Об увеличении изменчивости глобального климата примерно за 400 тыс. лет до настоящего времени // ДАН. 2013. Т. 456. № 5. С. 600–603.
9. Вакуленко Н.В., Иващенко Н.Н., Котляков В.М., Сонечкин Д.М. О бифуркациях умножения периода ледниковых циклов в плиоцене — плейстоцене // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2013. Т. 21. № 2. С. 88–112.
10. Вакуленко Н.В., Котляков В.М., Сонечкин Д.М. Предсказуем ли климат в геологическом масштабе времени? // ДАН. 2015. Т. 460. № 2. С. 215–219.
11. Имбри Д., Имбри К.П. Тайны ледниковых эпох. М.: Прогресс, 1988. 264 с.
12. Котляков В.М. Избранные произведения: Т. 1. Гляциология Антарктиды. М.: Наука, 2000. 431 с.
13. Котляков В.М. Глобальные изменения за четыре климатических цикла по гляциологическим данным // МГИ. 2000. Вып. 89. С. 106–111.
14. Миланкович М. Математическая климатология и астрономическая теория колебаний климата. М.-Л.: ГОНТИ, 1939. 207 с.
15. Монин А.С., Шишков Ю.А. История климата. Л.: Гидрометеиздат, 1979. 407 с.
16. Монин А.С., Сонечкин Д.М. Колебания климата по данным наблюдений. Тройной солнечный и другие циклы. М.: Наука, 2005. 191 с.
17. Смутьский И.И. Анализ уроков развития астрономической теории палеоклимата // Вест. РАН. 2013. Т. 83. № 1. С. 31–39.
18. Сонечкин Д.М. Обоснование четырехмерного (непрерывного) усвоения данных метеорологических наблюдений на основе динамико-стохастического подхода // Метеорология и гидрология. 1973. № 4. С. 13–19.
19. Федоров В.М. Вариации солярного климата как основа реконструкции, анализа и прогноза изменений глобального климата Земли // www.solar-climate.com/sc/astrotejriyaclimate.htm.
20. Шараф Ш.Г., Будникова Н.А. О вековых изменениях элементов орбиты Земли, влияющих на клима-

- ты геологического прошлого // Тр. Ин-та теоретич. астрономии АН СССР. 1967. Вып. 114. № 4 (127). С. 231–261.
21. *Шараф Ш.Г., Будникова Н.А.* Колебания солнечного облучения Земли, вызванные вековыми изменениями элементов земной орбиты // Тр. Ин-та теоретич. астрономии АН СССР. 1968. Вып. 182. № 2. С. 291–293.
 22. *Шараф Ш.Г., Будникова Н.А.* Вековые изменения орбиты Земли и астрономическая теория колебаний климата // Тр. Ин-та теоретич. астрономии АН СССР. 1969. Вып. 14. С. 48–85.
 23. *Agassiz L.* Upon glacier, moraines, and erratic blocks // *New Philos. Journ. Edinburgh.* 1838. V. 24. P. 864–883.
 24. *Berger A.* Long-term variations of daily insolation and Quaternary climatic changes // *Journ. of Atmospheric Sciences.* 1978. V. 35. P. 2362–2367.
 25. *Berger A., Loutre M.F.* Insolation values for the climate of the last 10 million years // *Quaternary Science Review.* 1991. V. 10. № 4. P. 297–317.
 26. *Calder N.* Arithmetic of ice ages // *Nature.* 1974. V. 252. P. 216–218.
 27. *Croll J.* Climate and Time in their Geological Relations: A theory of Secular Changes of the Earth's Climate. New-York: Appleton Press, 1875. 577 p.
 28. *Dansgaard W., Johnsen S.J., Clausen H.B., Dahl-Jendén D., Gunderstrup N.S., Hammer C.U., Hvidberg C.S., Steffensen J.P., Sveinbjörnsdóttir, Jouzel J., Bond G.* Evidence for general instability of past climate from a 250 kyr ice-core record // *Nature.* 1993. V. 264. P. 218–220.
 29. *Ditto W.L., Spano M.L., Savage H.T., Rauser S.N., Heagy J., Ott E.* Experimental observation of a strange nonchaotic attractor // *Physical Review Letters.* 1990. V. 65. № 5. P. 533–536.
 30. *Elderfield H., Ferretti P., Greaves M., Crowhurst S., McCave I.N., Hodell D., Piotrowski A.M.* Evolution of ocean temperature and ice volume through the Mid-Pleistocene climate transition // *Science.* 2012. V. 337. P. 704–709.
 31. EPICA community members. Eight glacial cycles from an Antarctic ice core // *Nature.* 2004. V. 429. P. 623–628.
 32. *Ghil M.* Theoretical climate dynamics: an introduction // *Turbulence and Predictability in Geophysical Fluid Dynamics and Climate Dynamics* / Eds. M. Ghil, R. Benzi and G. Parisi. New-York: North Holland, 1985. P. 347–402.
 33. *Grebogi C., Ott E., Pelikan S., Yorke J.A.* Strange attractors that are not chaotic // *Physica D.* 1984. V. 13. P. 261–268.
 34. *Gurney W.S.C., Nisbet R.M.* Ecological Dynamics. New-York: Oxford Univ. Press, 1998. 346 p.
 35. *Hays J.D., Imbrie J., Shackleton N.J.* Variations in the Earth's orbit: Pacemaker of the Ice Ages // *Science.* 1976. V. 194. P. 1121–1132.
 36. *Huybers P.* Early Pleistocene glacial cycles and the integrated summer insolation forcing // *Science.* 2006. V. 313. P. 508–511.
 37. *Huybers P.* Pleistocene glacial variability as a chaotic response to obliquity // *Climate of the Past.* 2009. V. 5. P. 481–488.
 38. *Imbrie J., Imbrie J.Z.* Modeling the climatic response to orbital variations // *Science.* 1980. V. 207. P. 943–953.
 39. *Ivashchenko N.N., Kotlyakov V.M., Sonechkin D.M., Vakulenko N.V.* On the nature of the Pliocene/Pleistocene glacial cycle lengthening // *Global Perspective on Geography.* 2013. V. 1. № 1. P. 9–20.
 40. *Ivashchenko N.N., Kotlyakov V.M., Sonechkin D.M., Vakulenko N.V.* On bifurcations inducing glacial cycle lengthening during Pliocene/Pleistocene epoch // *Intern. Journ. of Bifurcation and Chaos.* 2014. V. 24. № 8. 1440018 (8 pages).
 41. *Jouzel J., Masson-Delmotte V., Cattani O., Dreyfus G., Falourd S., Hoffmann G., Minster B., Nouet J., Barnola J.-M., Chappellaz J., Fischer H., Gallet J.-C., Johnsen S., Leuenberger M., Loulergue L., Lüthi D., Oerter H., Parrenin F., Raisbeck G., Raynaud D., Schilt A., Schwander J., Selmo E., Souchez R., Spahni R., Stauffer B., Steffensen J.P., Stenni B., Stocker T.F., Tison J.-L., Werner M., Wolff E.W.* Orbital and millennial Antarctic climate variability over the last 800000 years // *Science.* 2007. V. 317. P. 793–796.
 42. *Kaellen E., Crafoord C., Ghil M.* Free oscillations in a climate model with ice-sheet dynamics // *Journ. of Atmospheric Sciences.* 1979. V. 36. P. 2292–2303.
 43. *Liu H.S., Chao B.F.* Wavelet spectral analysis of the Earth's orbital variations and paleoclimatic cycles // *Journ. of Atmospheric Sciences.* 1998. V. 55. P. 227–236.
 44. *Lisiecki L.E., Raymo M.E.* A Pliocene-Pleistocene stack of 57 globally distributed benthic $\delta^{18}\text{O}$ records // *Paleoceanology.* 2005. V. 20. P. PA1003. doi:10.1029/2004PA001071.
 45. *Livina V.N., Kwasniok F., Lenton T.M.* Potential analysis reveals changing numbers of climate states during last 60 kyr // *Climate of the Past.* 2010. V. 6. P. 77–82.
 46. *Lorenz E.N.* Deterministic nonperiodic flow // *Journ. of Atmospheric Sciences.* 1963. V. 20. P. 130–141.
 47. *Lunt D.J., Valdes P.J., Haywood A., Rutt I.C.* Closure of the Panama seaway during the Pliocene: implications for climate and Northern Hemisphere glaciation // *Climate Dynamics.* 2007. V. 30. doi:10.1007/s00382-007-0265-6.
 48. *Maasch K.A., Saltzman B.* A low-order dynamical model of global climatic variability over the full Pleistocene // *Journ. of Geophys. Research.* 1990. V. 95. P. 1955–1963.
 49. *May R.M.* Simple mathematical models with very complicated dynamics // *Nature.* 1976. V. 261. P. 459–467.
 50. *Paillard D.* Glacial cycles: toward a new paradigm // *Reviews Geophysics.* 2001. V. 39. № 3. P. 325–346.
 51. *Pena L.D., Goldstein S.L.* Thermohaline circulation crisis and impacts during the mid-Pleistocene transition // *Science.* 2014. V. 345. P. 318–322.
 52. *Petit J.R., Jouzel J., Raynaud D., Barkov N.I., Barnola J.-M., Basile I., Bender M., Davis M., Delaygue G., Delmotte M., Kotlyakov V.M., Legrand M., Lipenkov V.Y., Lorius C., Pépin L., Ritz C., Saltzman E.,*

- Stievenard M.* Climate and atmospheric history of the past 420,000 years from the Vostok ice core, Antarctica // *Nature*. 1999. V. 399. P. 429–436.
53. *Pikovsky A.S., Zaks M.A., Feudel U., Kurth J.* Singular continuous spectra in dissipative dynamics // *Physical Review E*. 1995. V. 52. № 1. P. 285–296.
 54. *Rial J.A.* Pace making the ice ages by frequency modulation of Earth's orbital eccentricity // *Science*. 1999. V. 285. P. 564–568.
 55. *Rial J.A.* Earth's orbital eccentricity and the rhythm of the Pleistocene ice ages: the concealed pacemaker // *Global Planetary Change*. 2004. V. 41. P. 81–93.
 56. *Rial J.A.* Abrupt climate change: chaos and order at orbital and millennial scales // *Global Planetary Change*. 2004. V. 41. P. 95–109.
 57. *Rial J.A., Anaclerio C.A.* Understanding nonlinear responses of the climate system to orbital forcing // *Quaternary Science Review*. 2000. V. 19. P. 1709–1722.
 58. *Saltzman B., Verbitsky M.* Late Pleistocene climatic trajectory in the phase space of global ice, ocean state, and CO₂: observation and theory // *Paleoceanology*. 1994. V. 9. P. 767–779.
 59. *Schulz M., Stettenger K.* SPECTRUM: Spectral analysis of unevenly spaced paleoclimatic time series // *Computers and Geosciences*. 1997. V. 23. P. 929–945.
 60. *Schulz M., Mudelsee M.* REDFIT: Estimating red-noise spectra directly from unevenly spaced paleoclimatic time series // *Computers and Geosciences*. 2002. V. 28. P. 421–426.
 61. *Shackleton N.J., Crowhurst S., Hagelberg T., Piasias N.G., Schneider D.A.* A new late Neogene time scale: Application to Leg 138 sites // *Proc. Ocean Drill. Program Sci. Results*. 1995. V. 138. P. 73–101.
 62. *Shackleton N.J., Hall M.A., Pate D.* Pliocene stable isotope stratigraphy of ODP site 846 // *Proc. Ocean Drill. Program Sci. Results*. 1995. V. 138. P. 337–356.
 63. *Sutera A.* On stochastic perturbation and long-term-climate behaviour // *QJRM*. 1981. V. 107. P. 137–152.
 64. *Wolff E. W., Barbante C., Becagli S., Bigler M., Boutron C.F., Castellano E., de Angelis M., Federer U., Fischer H., Fundel F., Hansson M., Hutterli M., Jonell U., Karlin T., Kaufmann P., Lambert F., Littot G.C., Mulvaney R., Röthlisberger R., Ruth U., Severi M., Siggaard-Andersen M.L., Sime L.C., Steffensen J.P., Stocker T.F., Traversi R., Twarloh B., Udisti R., Wagenbach D., Wegner A.* Changes in environment over the last 800 000 years from chemical analysis of the EPICA Dome C ice core // *Quaternary Science Reviews*. 2010. V. 29. № 1–2. P. 285–295.
 65. *Wunsch C.* The spectral description of climate change including the 100 ky energy // *Climate Dynamics*. 2003. V. 20. P. 353–363.

Summary

This paper presents an overview of current researches developing the orbital theory of the glacial cycles, firstly proposed by M. Milankovitch, both as an empirical investigation of insolation and its impact upon paleoclimate, and as a modeling of these effects. Using the ideas and methods of the present-day theory of nonlinear dynamical systems together with the technique of paleoclimatic time series analysis with wavelets, we identified features of the climatic «attractors», which were characteristic for both the Pliocene and Pleistocene climates. Thus, it was found that the Mid-Pleistocene transition in durations of the glacial cycles had occurred in nearly 1.25 million years BP. This was caused by the loss of stability of the Pliocene climatic attractor that was a pure periodic response of the climate system to changes of insolation stipulated by the greatest 41-ka cycle of the orbit inclination.

The first factor of the loss of stability was beat of the insolation changes due to composition of the 41-ka cycle with significantly longer another cycle with period of about 1.2 ma. A general trend of the climate cooling over both the Pliocene and Pleistocene was the second reason. After the Mid-Pleistocene transition a new attractor was formed which was also a limiting cycle but with the twice longer period. By this means the Mid-Pleistocene transition corresponded to a notion that is called as «bifurcation of the period doubling» in the theory of dynamical systems. In succeeding times the new Pleistocene attractor alternately trebled, doubled, and again trebled its period «wandering» between different resonances with time-varying combinative harmonics of obliquity and eccentricity. Such behavior is typical for dynamical systems, which are influenced by two or more external forces with incommensurable periods. It seems very intricate («strange» in mathematical terms) but may be nonchaotic.

Nonchaotic state of the Pleistocene attractor has been confirmed by means of special analysis of the power spectra of the Pleistocene series of climate records. Thus, there is a principal possibility to predict a subsequent evolution of the Pleistocene attractor. In particular, comparison of paleoclimatic variations occurred during the Marine isotope stage 11 and the Holocene period suggests that the present-day interglacial will soon come to the end (in about a thousand years).